Департамент образования города Москвы

Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение города Москвы «Гимназия №1505

«Московская городская педагогическая гимназия-лаборатория»»

**РЕФЕРАТ**

**на тему**

**Арифметика музыки**

Выполнил:

Мазёлкин Илья Александрович

Руководитель:

Дмитриев Геннадий Владимирович

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (подпись руководителя)

Рецензент:

Маргаритов Виталий Сергеевич

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (подпись рецензента)

Москва

2016/2017 уч.г.

**Оглавление**

[Введение 2](#_Toc420856888)

[1. Физическое описание процессов колебаний и волн. Образование стоячих волн на примере колебаний струны. 3](#_Toc420856889)

[1.1 Периодичсекие процессы 3](#_Toc420856890)

[1.2 Гармонические колебания 3](#_Toc420856891)

1.3 Физические условия……………………………………………………………………….4

1.4 Волны ……………………………………………………………………………...............4

1.5 Стоячие волны …………………………………………………………………………………7

[2. Математическое описание построения музыкального ряда…………………………………………………………………………………………………………………….……9](#_Toc420856892)

[2.1 Математическое описание построения музыкальной гаммы…………………………………………………………………………………………………………….10](#_Toc420856893)

[2.2 Звук струн 10](#_Toc420856894)

2.3 Колебания струн монохорда……………………………………...................................11

2.4 Смычковые музыкальные инструменты ……………………………………....12

[Заключение 12](#_Toc420856895)

[Список литературы 12](#_Toc420856896)

**Введение**

Интерес к данной теме обусловлен тем, что мне нравиться музыка и мне нравиться заниматься ей, но также я увлекаюсь математикой и физикой. Мне стало интересно, как физика и математика связаны с музыкой.

Что вообще такое музыка? Как считал немецкий философ, математик и физик Готфрид Лейбниц: «Музыка-это бессознательное упражнение души в арифметике». Если переосмыслить слова Лейбница, то мы можем предположить, что мы каждый день тренируем арифметику.

Приведу пример:

Ухо человека очень чувствительно, и если частота звука возрастёт хотя бы на 1-2 герца, то мы поймём, что звук повысился.

Вот ещё один пример: Возьмём число сто. Представим его как десять десятков. Рядом положим линейку и увидим, что десятки обозначены большими чёрточками. Это и есть каркас. А в каркасе размещается единицы, у них чёрточки поменьше. Мы вспомнили это для того, чтобы сравнить этот пример с музыкальным рядом. У диапазона звуков, которыми мы обладаем, тоже есть каркас – он делится на октавы. В музыке каждый восьмой звук (не считая чёрных клавиш) закрывает октаву и начинает следующую.

Актуальность: Математика и музыка – два школьных предмета, два полюса человеческой культуры. Слушая, музыку мы попадаем в волшебный мир звуков и открываем в ней совершенство, простоту и гармонию. Решая математические задачи, мы погружаемся в строгое пространство чисел. И не задумываясь о том, что мир звуков и пространство чисел издавна тесно связаны друг с другом.

И что если попробовать определенным образом переложить ноты на числа. Будет ли наблюдаться в этом числовом ряду закономерность? Если такая связь существует, то можно предположить обратное, что ряд чисел имеет свое музыкальное звучание. В этом и актуальность моего исследования.

Цель: Выяснить и разобраться, как же всё-таки музыка связана с математикой.

Задачи:

1. Изучить информацию по данной теме
2. Систематизировать полученную информацию в соответствии с целью работы
3. Описать виды колебаний, волны и их применение и элементы акустики
4. Написать единый текст.

**Первая глава: Физическое описание процессов колебаний и волн. Образование стоячих волн на примере колебаний струны.**

***Периодические процессы***

В жизни мы часто замечаем такие временные процессы, как: смена дня и ночи, вращение Луны вокруг Земли и т.д. Периодические процессы можем наблюдать в технике, например, колебание маятника, или движение частей машин. В таких явлениях какая-нибудь величина измеряется через определённое время-период.

Периодическая величина (математическое определение): если **f(t)** есть периодическая функция **t** с периодом **T**, то при любом **t** функция **f(t+T)=f(t)**.

Периодическая величина (физическое определение): величина, которая воспроизводится через определённый промежуток времени ***T***, называемый *периодом*.

Период: время одного полного колебания.

Колебание - это повторяющийся в той или иной степени во времени процесс изменения состояний системы около точки равновесия.

Волновой процесс - совокупность колебаний всех частиц, при которой колебания передаются от одной частицы к другой. Волна – процесс распространения колебаний в пространстве от одних точек среды к другим.

***Гармонические колебания***

Гармонические колебания-колебания, в которых изменение величины происходит по синусоидальному (косинусоидальному) закону.

Вот пример: проекция точки движется равномерно по окружности и изменяется со временем по синусоидальному закону. Если у окружности радиус = R и угловая скорость вращения точки , то проекция x равна

Период изменения x, очевидно, равен

Через время T, и через время одного оборота точки, весь процесс в точности повторится. Следовательно, T-период гармонических колебаний, а -циклическая частота гармонических колебаний.

Частота колебания - число колебаний за единицу времени.

Частоту измеряют в герцах. 1 герц=1 колебание/сек.

***Физические условия***

Например, возьмём пример с маятником. Сначала, нужно подвесить грузик на нить, потом отклонить его от положения равновесия в сторону и отпустить. Грузик будет двигаться к положению равновесия с каким-то ускорением, возникающее под действием силы нити и силы тяжести. Когда грузик достигнет положения равновесия, где ускорение=0, грузик по инерции пройдёт положение равновесия и будет тормозить с той же силой, которая его ускоряла ранее. Грузик остановится и пойдёт обратно. Именно так возникают собственные колебания. Они называются собственными, так как во время колебаний грузик находиться под действием сил, который определены физическим устройством маятника, анне других тел.

Рассмотрим собственные колебания маятника:

Пусть угол отклонения мятника -. Нужно выяснить как угол будет изменяться со временем.

**T**

**mg**

**F**

**T**

**mg**

***l***

Сила, которая действует на грузик,

состоит из двух сил: сила тяжести (**mg**) и сила

натяжения нити (**T**). Если угол отклонения

малый, то дугу траектории грузика можно

считатьпрямой. Отклонение грузика от

положения равновесия будет **x**. При малом

угле можно считать, что

L - длина маятника от точки привеса нити

до центра тяжести. Сила F,которая действует

вдоль дуги, равна или при малом угле

Уравнение движения грузика будет выглядеть

**F** со знаком минус, потому что она направлена против направления смещения **x**. Можно заменить угол на x/l, то уравнение можно записать так:

Сокращаем m

Решение уравнения будет таково:

1. **амплитуда** колебаний, это величина, определяющая максимальное отклонение колеблющейся точки от положения равновесия*.*

***φ*** – **фаза**, величина, определяющая величину смещения *x* колеблющейся точки от положения равновесия в начальный момент времени (*t=0).*

Таким образом, нашли, что x изменяется во времени по синусоидальному закону.

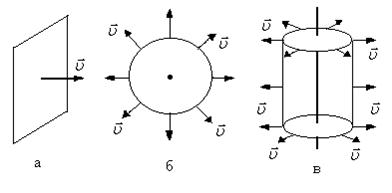
Колебания происходят периодически, процесс повторяется через период собственных колебаний T.

Частота колебаний маятника при малых углах отклонения , или частота собственных колебаний равна

***Волны***

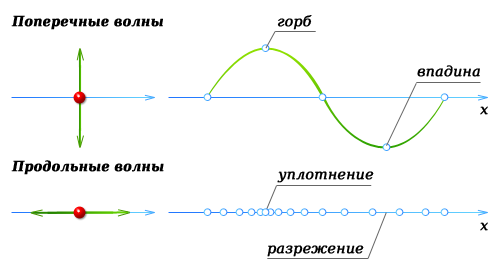
Все волны делятся по форме волнового фронта на:

* Плоские волны – волны, фронт которых представляют собой плоскость.
* Сферические волны – волны, фронт которых представляют собой сферу.
* Цилиндрические волны – волны, фронт которых представляют собой цилиндр.



Фронт волны - поверхность, до которой дошел [волновой процесс](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%BE%D0%BB%D0%BD%D0%B0) к данному моменту времени.

По направлению колебаний на:

* Поперечные волны – волны, распространяющиеся в направлении, перпендикулярном к плоскости.
* Продольная волны – волны, распространяющиеся в направлении распространения колебаний

Волна продольно струны представляет волновое движение. Давайте подробнее посмотрим, как распространяется волна по струне. Пусть волна распространяется по струне со скоростью ***c***, которая зависит от натяжения струны. Величину ***c*** называют скоростью распространения волны.

Скорость движения волны по натянутой струне можно найти так. Когда волна распространяется по струне бежит «горбик», форма которого неизменная. Допустим, что на струну надели трубочку, которую изогнули в форме волны, она двигается продольно струны со скоростью ***c***. Допустим, что трубочка стоит на месте, а струна протягивается через неё с постоянной скоростью ***c*** в противоположном направлении.

Давайте найдём, при какой скорости ***c*** трубка не будет давить на струну. Пусть радиус трубки = ***R.*** На струну действуют две одинаковые силы натяжения ***T*** и ***T1***, действующие под углом . Если же угол маленький, то результат этих сил равен

Или

- масса элемента струны

- масса единицы длины струны

После сокращения получаем уравнение скорости распространения волны

При выведении скорости распространения волны мы считали, что

струна абсолютно гибкая. Это означает, что для изгиба струны не нужно прилагать никаких усилий.

***Стоячие волны***

В одномерном случае две волны одинаковой частоты, длины волны и амплитуды, распространяющиеся в противоположных направлениях (например, навстречу друг другу), будут взаимодействовать, в результате чего может возникнуть стоячая волна. Например, гармоничная волна, распространяясь вправо, достигая конца струны, производит стоячую волну. Волна, что отражается от конца, должна иметь такую же амплитуду и частоту, как и падающая волна.

Рассмотрим падающую и отраженную волны в виде:

{\displaystyle y\_{1}\;=\;y\_{0}\,\sin(kx-\omega t)}{\displaystyle y\_{2}\;=\;y\_{0}\,\sin(kx+\omega t)}где:

* *y0* — амплитуда волны,
* {\displaystyle \omega }циклическая (угловая) частота, измеряемая в радианах в секунду,
* *k* — волновой вектор, измеряется в радианах на метр, и рассчитывается как {\displaystyle 2\pi } поделённое на длину волны {\displaystyle \lambda },
* *x* и *t* — переменные для обозначения длины и времени.

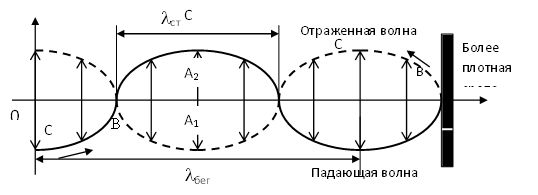
Поэтому результирующее уравнение для стоячей волны *y* будет в виде суммы *y1* и *y2*:

{\displaystyle y\;=\;y\_{0}\,\sin(kx-\omega t)\;+\;y\_{0}\,\sin(kx+\omega t).}

Используя тригонометрические соотношения, это уравнение можно переписать в виде:

{\displaystyle y\;=\;2\,y\_{0}\,\cos(\omega t)\;\sin(kx).}

Когда две одинаковые волны с равными амплитудами и периодами распространяются навстречу друг другу, то при их наложении возникают стоячие волны. Стоячие волны могут быть получены при отражении от препятствий. Допустим, излучатель посылает волну к препятствию (падающая волна). Отраженная от него волна наложится на падающую волну. Уравнение стоячей волны можно получить сложением уравнения падающей волны

**Отраженная волна движется в направлении, противоположном падающей волне, поэтому расстояние х берем со знаком минус. Смещение точки, которая участвует одновременно в двух колебаниях, равно алгебраической сумме  . После несложных преобразований, получаем

Это уравнение стоячей волны определяет смещение любой точки волны.

Величина не зависит от времени и определяет амплитуду любой точки с координатой х. Каждая точка совершает гармоническое колебание с периодом Т. Амплитуда Аст для каждой точки вполне определена. Но при переходе от одной точки волны к другой она изменяется в зависимости от расстояния х. Если придавать х значения, равные   и т.д., то при подстановке в уравнение (8.16) получим  . Следовательно, указанные точки волны остаются в покое, т.к. амплитуды их колебаний равны нулю. Эти точки называются узлами стоячей волны. Точки, в которых колебания происходят с максимальной амплитудой, называются пучностями. Расстояние между соседними узлами (или пучностями) называются длиной стоячей волны и равно

где λ - длина бегущей волны.

В стоячей волне все точки среды, в которой они распространяются, расположенные между двумя соседними узлами, колеблются в одной фазе. Точки среды, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе -фазы их отличаются на π. т.е. при переходе через узел фаза колебаний скачкообразно меняется на π. В отличие от бегущих волн в стоячей волне отсутствует перенос энергии вследствие того, что образующие эту волну прямая и обратная волны переносят энергию в равных количествах и в прямом и в противоположном направлениях. В том случае, когда волна отражается от среды более плотной, чем та среда, где распространяется волна, в месте отражения возникает узел, фаза изменяется на противоположную. При этом говорят, что происходит потеря половины волны. Когда волна отражается от среды менее плотной в месте отражения, появляется кучность, и потери половины волны нет.

Использование стоячих волн в музыкальных инструментах будет описано во второй главе.

**Вторая глава: Математическое описание построения музыкального ряда.**

**1. Гаммой**, или **звукорядом**, называется последовательность звуков, расположенных от основного тона(звука) в восходящем или нисходящем  порядке.

**2. Интервалом** между тонами называется порядковый номер ступени верхнего тона относительно нижнего в данном звукоряде.

**Интервальным** **коэффициентом** двух тонов считают отношение частоты колебаний верхнего тона к частоте колебаний нижнего:

***w1: w2.***

Некоторые интервальные коэффициенты и соответствующие им интервалы в средние века были названы **совершенными консонансами** и получили следующие названия:

октава ( *w2 : w1=*2 : 1*, l2 : l1=*1 : 2);  
квинта ( *w2 : w1*= 3 : 2, *l2 : l1*= 2 : 3);   
кварта ( *w2 : w1*= 4 : 3, *l2 : l1* = 3 : 4).

В основе этой музыкальной системы были два закона, которые носят имена двух великих ученых - Пифагора и Архита. Вот эти законы:

1. Две звучащие струны определяют консонанс, если их длины относятся как целые числа, образующие треугольное число 10=1+2+3+4, т.е. как 1:2, 2:3, 3:4. Причем, чем меньше число n в отношении ***n:(n+1)***,где(***n***=1,2,3), тем созвучнее получающийся интервал.

2. Частота колебания ***w*** звучащей струны обратно пропорциональна ее длине ***l*** .

где ***а*** - коэффициент, характеризующий физические свойства струны.

***Математическое описание построения музыкальной гаммы***

Основой музыкальной гаммы пифагорейцев был интервал – **октава**. Она является консонансом, повторяющим верхний звук. Для построения музыкальной гаммы пифагорейцам требовалось разделить октаву на красиво звучащие части. Так как они верили в совершенные пропорции, то связали устройство гаммы со средними величинами: *арифметическим, гармоническим.*

*Среднее арифметическое* частот колебаний тоники (*w1*)и ее октавного повторения (*w2*) помогает найти совершенный консонанс **квинту**.

Т.к. *w2 =*2*w1*, то *w3* = (*w1* + *w2*) : 2 = 3*w1 :*2 или *w3* : *w1*= 3 : 2 (*w3* – частота колебаний квинты).

Длина струны *l3*, соответствующая квинте, по второму закону Пифагора-Архита будет *средним гармоническим* длин струн тоники *l1* и ее октавного повторения *l2*.

Т.к. *l2* = *l1* : 2, то *l3* = 2*l1* *l2* : (*l1*+ *l2*) = 2*l1* *l1* : 2 : (*l1* +*l1* : 2) = *l12* : ((2*l1* + *l1* ) : 2) = 2 *l12* : :3*l1* = 2*l1* : 3; или *l3* : *l1*= 2 : 3.

Взяв далее среднее гармоническое частот основного тона *w1*и октавы*w2*, получим

*w4*= = 2*w1w2* : (*w1 + w2 ) =* 2*w1*2*w1 : ( w1 +*2*w1 ) =*4*w12 :*3*w1 =*4*w1 :*3*.*

Значит *w4*: *w1* = 4 : 3. В результате находим еще один совершенный консонанс – **кварту**.

Определим, как связаны длины струн найденных частот (*l4* и *l1* ):

*l4* = ( *l1*+ *l2* ) : 2 = ( *l1*+ *l1*: 2 ) : 2 = ( 2*l1*+ *l1*) : 2 : 2 = 3*l1*: 4; *l4* : *l1*= 3 : 4.

Это значит, что длины струн *l1*, *l2* и *l4* связаны между собой средним арифметическим.

Итак, **частота колебаний** **квинты** является *средним арифметическим* частот колебаний основного тона *w1*и октавы *w2*, а частота колебаний **кварты**- *средним гармоническим* *w1*и *w2*. Или иначе: **длина струны квинты** есть *среднее гармоническое* длин струн основного тона *l1*и октавы *l2*, а **длина струны кварты** – *среднее арифметическое* *l1*и *l2*. Это лишь незначительная часть тех прекрасных пропорций, которые были воплощены в пифагорейской музыкальной гамме.

**2.** У древних греков существовал и другой способ построения музыкальной гаммы, кроме описанного выше. Он был более простым и удобным и до сих пор применяется при настройке музыкальных инструментов.

Оказывается, гамму можно построить, пользуясь лишь совершенными консонансами - квинтой и октавой. Суть этого метода состоит в том, что от исходящего звука, например "до" (3/2)0 = 1, мы движемся по квартам вверх и вниз и полученные звуки собираем в одну октаву. И тогда получаем: (3/2)1= 3/2 - соль, (3/2)2:2 = 9/8 - ре, (3/2)3:2 =27/16 - ля, (3/2)4:22 = 81/64 - ми, (3/2)5: 22 = 243/128 - си, (3/2)-1:2 =4/3 - фа.

**Принцип построения музыкальных инструментов (на примере струнных).**

***Звуки струн.***

Законы колебаний струн обычно формулируются следующим образом: число колебаний (*N*) струны:

1. обратно пропорционально её длине (*L*);
2. обратно пропорционально её толщине ил радиусу её поперечного сечения (*R*);
3. прямо пропорционально корню квадратному из её натяжения (*P*);
4. обратно пропорционально корню квадратному из её плотности (*D*).

Из этих законов можно вывести формулу:

Колебательное состояние звучащей струны можно рассматривать как пример образования стоячей волны, причём на концах струны находятся узлы, а в её середине пучность. Основной тон струны получается от колебания струны как одного целого. Первый добавочный тон (обертон) происходит от колебания каждой половины струны отдельно, причём образуется три узла и две пучности; две половины находятся постоянно в противоположных фазах; число колебаний этого добавочного тона 2N, так как основного N. Дальнейшие добавочные тоны получаются от отдельных колебаний каждой трети, четверти, пятой доли и т.д. струны. Каждое из этих колебаний представляет частный случай стоячих волн.

**Пучность —** участок [стоячей волны](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%82%D0%BE%D1%8F%D1%87%D0%B0%D1%8F_%D0%B2%D0%BE%D0%BB%D0%BD%D0%B0), в котором [колебания](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D0%B5%D0%B1%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%8F) имеют наибольшую [амплитуду](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BC%D0%BF%D0%BB%D0%B8%D1%82%D1%83%D0%B4%D0%B0).

**Узел** **—** участок волны, в котором амплитуда колебаний минимальна.

Тембр звука струны также зависит от способа производства звука (например, трение смычка при игре на скрипке). Кроме производства, тембр зависит от места, где возникает волна. При ударе по середине струны усиливается основной тон, тогда как октава почти отсутствует; при ударе на одной четверти усиливается октава.

При ударе усиливается тот звук, который в месте удара имеет пучность, и, наоборот, звук не возникает совсем, если в месте удара приходится его узел.

***Колебания струны монохорда.***

Для того, чтобы показать колебания струны, можно воспользоваться монохордом (колебания звучащей струны монохорда можно рассматривать, как пример образования стоячей волны, причём на концах струны находятся узлы, а в её середине пучность.):

Если положить бородку гусиного пера на середину струны и затем провести смычком по одной из её половин, то струна издаёт тон, составляющий октаву тона, издаваемого всей струной.



Лёгкое прикосновение пера к середине струны достаточно для того, чтобы разделить её на две колеблющиеся части. Проведя смычком, можно отнять перо, но струна будет продолжать колебаться, издавая такой же тон, как и прежде.

Если коснуться струны в точке, определяющий четверть её длины, и провести смычком по короткой её части, то приходит в колебательное движение не только эта часть, но и длинная часть разделяется на три пучности с двумя узлами между ними.

***Смычковые музыкальные инструменты***

Каждая точка струны движется прямо и обратно с постоянной скоростью между двумя конечными тонами её колебания. Для серединной точки скорость, с которой она поднимается, равна скорости, с которой она опускается. Если близ правого конца струны провести смычком вниз, то скорость опускания на правой половине струны будет меньше скорости поднятия и тем меньше, чем ближе будем приближаться к концу. На левой половине струны происходит обратное. В том месте, где проводят смычком, скорость опускания струны кажется равною движения смычка. Во время большей части каждого колебания струна здесь прилегает к смычку и им увлекается; затем она вдруг освобождается и быстро отскакивает назад, чтобы тотчас же снова быть захваченной и увлечённой другою точкою смычка. Так как мы можем получить форму колебания отдельных точек струны, то из неё может быть вычислена сила отдельных высших добавочных тонов с помощью математического анализа. Само вычисление даёт следующее: *Если смычок проводится правильно, то струна содержит все обертоны, которые могут образоваться при существующей степени её упругости; эти высшие добавочные тоны убывают в силе сообразно с их порядком.*

**Заключение**

Я ставил перед собой цель - выяснить, как всё-таки музыка связана с математикой и физикой. Когда я только взялся за эту тему, у меня было много вопросов: Как построена вся музыкальная грамматика? Почему у фортепиано одни клавиши белые, а другие чёрные? Почему чёрные располагаются не симметрично, а группами по две и три? и т.д. После написания реферата, я теперь знаю ответы на эти вопросы.

Я хотел разобраться в теории музыки с точки зрения математики, у меня получилось разобраться в физическом описании процессов колебаний и волн, в математическом описании построения музыкального ряда и в принципе построения музыкальных инструментов, на примере струнных. Я не очень разобрался как решаются дифференциальные уравнения, поскольку мы это ещё не проходили.

Я пришёл к выводу, что работа с точки зрения музыкальной грамматики очень интересна и важна для меня.

Я планирую продолжить эту тему в 10 классе, при работе с дипломом.

Для написания реферата использовались следующие источники:

* Газарян, С.С В мире музыкальных инструментов
* Стрелков, С.П. Механика/Часть третья: Колебания и волны. Элементы акустики.
* Белявский, А.Г. Теория звука в приложении к музыке
* <http://physics-lectures.ru/mexanicheski-kolebaniya-i-volny/8-10-stoyachie-volny/>
* <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B8%D0%BA%D0%B8%D0%BF%D0%B5%D0%B4%D0%B8%D1%8F>