**§ 1. Двудольные графы. Степень вершины**

**Графом** называется конечное множество точек, некоторые из которых соединены линиями. Точки называются **вершинами** графа, а соединяющие линии – **рёбрами**.

Знакомство с графами надо начинать с самого простого.

Рассмотрим **задачу 1**: в трёх вершинах пятиугольника расположили по фишке. Разрешается двигать их по диагонали в свободную вершину. Можно ли такими действиями добиться того, чтобы одна из фишек вернулась на первоначальное место, а две другие поменялись местами?[[1]](#footnote-1)



Для решения таких задач надо изобразить условие графически. Это помогает решению. Для начала последовательно пронумеруем вершины этой пятиконечной звезды. Передвигая фишку из вершины 1 можно попасть в вершину 3 или 4, из вершины 2 – в вершину 4 или 5, из вершины 3 – в вершину 5 или 1, из вершины 4 – в вершину 1 или 2, из вершины 5 – в вершину 2 или 3. Двигаясь последовательно по этим вершинам, получаем «развёрнутую» звезду – пятиугольник, где вершины расположены в такой последовательности: 1, 3, 5, 2, 4. Из рисунка видно, что вершины пятиугольника как будто нанизаны на одну нитку, а значит, изменить их последовательность не представляется возможным.



**Задача 2**: можно ли выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы сумма любых двух рядом стоящих цифр делилась либо на 5, либо на 7, либо на 13?

Примем за вершины цифры от 0 до 9. Если сумма двух чисел, которые стоят рядом, делится на 5 или на 7, или на 13, то соединим эти вершины ребром.[[2]](#footnote-2)



Например, цифра 6 с цифрой 9 в сумме даёт 15, а 15 делится на 5, следовательно, соединяем эти две вершины ребром. Таким образом, мы получили, что из вершины 6 выходит 5 рёбер: 6+9=15, 6+4=10 (делится на 5); 6+1=7, 6+8=14 (делится на 7); 6+7=13 (делится на 13). Тоже проделываем с оставшимися вершинами. После чего можно выписать возможные последовательности цифр, двигаясь по рёбрам графа: 0-7-3-4-6-1-9-5-2-8; 6-1-9-4-3-7-8-2-5-0.

Графы бывают разными. **Несвязный граф** состоит из нескольких частей, которые называются **компонентами связности**. **Связный граф** – это граф, для любой вершины которого есть путь, соединяющий вершину с любой другой вершиной этого графа. Связный граф имеет одну компоненту связности.



Бывают графы, у которых есть **изолированные вершины**, то есть вершина соединена ребром сама с собой. Не важно, как расположены вершины, а важно то, как они соединены.[[3]](#footnote-3)



Рис. 3

Из каждой вершины может выходить разное количество рёбер. Количество рёбер, исходящих из вершины называется **степенью** (порядком) **вершины**. **Чётная вершина** – это вершина, из которой выходит чётное число рёбер, а **нечётная вершина** – это вершина, из которой выходит нечётное число рёбер. Так на рисунке 3 из вершины A выходит два ребра, значит, она имеет степень 2, вершина B имеет степень 4, вершина E – 2, вершины С и D-1.

**Задача 4:** в стране 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее чем с семью другими. Докажите, что из любого города можно добраться в любой другой (возможно, проезжая через другие города).[[4]](#footnote-4)

Предположим, что из одного какого-то города нельзя добраться в другой. Возьмём два этих города. Каждый из них соединён с семью другими городами. Получаем два графа, состоящих из восьми вершин. Чтобы предположение оказалось верным, должно быть не менее 16 вершин, а по условию 15. Значит, существует вершина x, которая соединяет два графа. Следовательно, из любого города можно проехать в любой другой.



Существуют **двудольные графы**. Вершины этого графа можно раскрасить двумя цветами так, что рёбра будут соединять пары вершин разного цвета. В качестве примера можно привести геометрическую фигуру квадрат. Вершины квадрата можно раскрасить в два цвета, чередуя вершины через одну. А пятиугольник так раскрасить нельзя. В нём всегда окажутся две смежные вершины одинакового цвета.



**Задача 5**: нарисуйте двудольный граф, где чёрные и белые вершины – это соответственно чёрные и белые клетки доски 3x3, а рёбра соответствуют ходам коня.[[5]](#footnote-5)

С каждым ходом конь чередует цвет клетки, на которой он стоит. Соответственно цвета вершин графа будут расположены поочерёдно: белые и чёрные. Вершин, соединённых рёбрами будет 8, потому что в квадрате 3x3 всего 9 клеток. Но так как в середину такой шахматной доски конь прийти не сможет, то от вершины под номером 9 не будет исходить ни одного ребра.



**Теорема о числе рёбер двудольного графа**:

1. Если в двудольном графе n белых вершин, и все они имеют степень s, то всего в графе ns рёбер.
2. Число рёбер равно сумме степеней всех белых вершин (а также равно сумме степеней всех четырёх вершин).

**Теорема «Лемма о рукопожатиях»**: сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству рёбер.

**Докажем эту теорему**. Так как каждое ребро имеет два конца, то количество рёбер в два раза меньше, чем количество их концов. Количество концов всех рёбер равно сумме степеней всех вершин графа. Следовательно, сумма степеней всех вершин равна удвоенному количеству рёбер.

Название теоремы «Лемма о рукопожатиях» произошло от следующей задачи.

В компании некоторые люди пожали руки друг другу. Докажите, что количество людей, сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.

Лемма о рукопожатиях также верна, если существуют вершины, соединённые ребром сами с собой, или рёбра, которые соединяют уже соединённые вершины.

**Следствие из теоремы**: число нечётных вершин графа всегда чётно.

**Доказательство:** сумма степеней всех вершин в два раза больше количества рёбер, значит, она должна быть чётной. Из этого следует, что в ней должно быть чётное число нечётных вершин.

**Задача 6**: докажите, что связный граф, в котором степень каждой вершины чётна, при удалении любого ребра остаётся связным.[[6]](#footnote-6)

Предположим, что граф при удалении ребра распадётся на две компоненты связности. Тогда получится, что две вершины, которые были соединены ребром, окажутся в разных компонентах связности. Степени этих вершин станут нечётным, следовательно, в каждом компоненте связности окажется по нечётной вершине, а такого быть не может. Значит, граф останется связным.

1. *В. М. Гуровиц В. В. Ховрина Графы. 4-е изд. М.: МЦНМО, 2014. С. 5-6.* [↑](#footnote-ref-1)
2. *Там же. С. 10.* [↑](#footnote-ref-2)
3. *Там же. С. 7.* [↑](#footnote-ref-3)
4. *Там же. С. 8-9, 11.* [↑](#footnote-ref-4)
5. *Там же. С. 13,14.* [↑](#footnote-ref-5)
6. *Там же. С. 14, 15.* [↑](#footnote-ref-6)