Департамент образования города Москвы
Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение города Москвы
«Гимназия №1505
«Московская городская педагогическая гимназия-лаборатория»»

ДИПЛОМНОЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

на тему

Пропорциональный регулятор вращения в среде программирования P5.js

Выполнил (а):
Фомичев Артем Сергеевич
Руководитель:
Наумов Алексей Леонидович
_____ (подпись руководителя)
Рецензент:
Ветюков Дмитрий Алексеевич
_____ (подпись рецензента)

Москва
2016/2017 уч.г.

Оглавление

Введение 2

Глава 1. Вращательное движение абсолютно твердого тела. Параграф 1. Кинематика вращательного движения 5

Параграф 2. Динамика вращательного движения 7

Глава 2. Описание моделей. Параграф 1. Основа всех моделей 11

Параграф 2. Пропорциональный регулятор 13

Параграф 3. Классификация моделей 15

Параграф 4. Условия пригодности коэффициентов 19

Параграф 5. Методика исследования 20

Глава 3. Исследование. Параграф 1. Линейная зависимость 21

Параграф 2. Кубическая зависимость 27

Параграф 3. Сравнение 31

Заключение 33

Список источников 34

Приложение 35

Введение

Актуальность темы исследования:

В настоящее время все более актуальной становится тема создания и применения в различных сферах жизни автопилотируемых устройств. Начиная с исследований далекого космоса и отправки беспилотных спутников и зондов, где самостоятельность в управлении устройства является необходимостью из-за невозможности присутствия и участия человека, и заканчивая доставкой заказов в интернет-магазинах, где применение беспилотных коптеров является экономически выгодным решением.

Общее описания работы:

Особенно интересна основа алгоритма, с помощью которого устройство способно самостоятельно регулировать свое положение на плоскости или в пространстве. В своей работе в качестве этой основы я буду рассматривать пропорциональный регулятор: зависимость одной величины от другой посредствам коэффициента/коэффициентов.

Из трех существующих в классической механике видов движения - поступательного, вращательного и колебательного - наиболее наглядно демонстрация работы пропорционального регулятора пройдет на вращательном, поэтому необходимо разработать определенные модели, на которых мы будем проводить эксперименты и которые должны представлять из себя некие тела, имеющие своей целью повернуться на заданный угол.

Эти модели будут основаны на кинематике вращательного движения, и нужны они чтобы найти самый эффективный с точки зрения погрешности и времени поворота алгоритм. Самый эффективный алгоритм ляжет в основу последней модели, которая, в свою очередь, будет основана уже на динамике вращательного движения.

Цели исследования:

1. Изучить особенности работы пропорционального регулятора на примере вращательного движения в среде программирования P5.js: определить общие принципы подбора коэффициентов для пропорционального регулятора в разных видах вращательного движения (эти виды будут подробно описаны в самой работе).
2. Создать модель алгоритма, с помощью которого какой-либо программируемый в P5.js объект сможет поворачиваться на заданные ему углы с минимальным временем и минимальной погрешностью.

Задачи исследования:

- Изучить формулы кинематики и динамики вращательного движения.
- Изучить основы программирования в среде P5.js.
- Разработать алгоритмы для моделей, на основе которых будет проходить изучение особенностей подбора коэффициентов для пропорционального регулятора, и воплотить их в среде программирования P5.js.
- Собрать и проанализировать данные о времени и погрешности поворотов на разные углы у разных моделей.
- Выявить основные особенности подбора коэффициентов для моделей и определить самых эффективный алгоритм из всех разработанных.
- Написать на основе этого алгоритма модель для динамики вращательного движения.

Моя работа будет состоять из трех частей. Первая будет посвящена краткому рассказу о кинематике и динамике вращательного движения, во второй я подробно опишу процесс создания и принцип работы всех трех моделей, а также на их примере расскажу, что такое пропорциональный регулятор. В третьей части будет

рассказано о проведенных экспериментах на всех моделей и представлены выводы о подборе коэффициентов, а также будет представлено сравнение моделей по показателям времени и погрешности поворота.

Глава 1. Вращательное движение абсолютно твердого тела

Параграф 1. Кинематика вращательного движения

Поскольку в дальнейшем речь будет идти о вращательном движении *абсолютно твердого тела*, сначала необходимо разобраться, какое же тело является *абсолютно твердым*.

Абсолютно твердым телом называется тело, расстояния между любыми двумя точками которого постоянны. Иначе говоря, размеры и форма абсолютно твердого тела не изменяются при его движении. Всякое твердое тело можно мысленно разбить на достаточно большое число элементарных частей так, чтобы размеры каждой из них были много меньше размеров всего тела. Поэтому абсолютно твердое тело часто рассматривают как систему материальных точек, жестко связанных друг с другом. - Б.М. Яворский: *Справочник по физике для инженеров и студентов*

При вращательном движении абсолютно твердого тела все его точки описывают окружности, центры которых находятся на одной прямой, называемой осью вращения. Поскольку тело является твердым, все его точки за любые отрезки времени поворачиваются на один и тот же угол - *угол поворота* (φ, измеряется в радианах). Основной задачей кинематики вращательного движения является нахождения этого угла (*рис 1.1*).

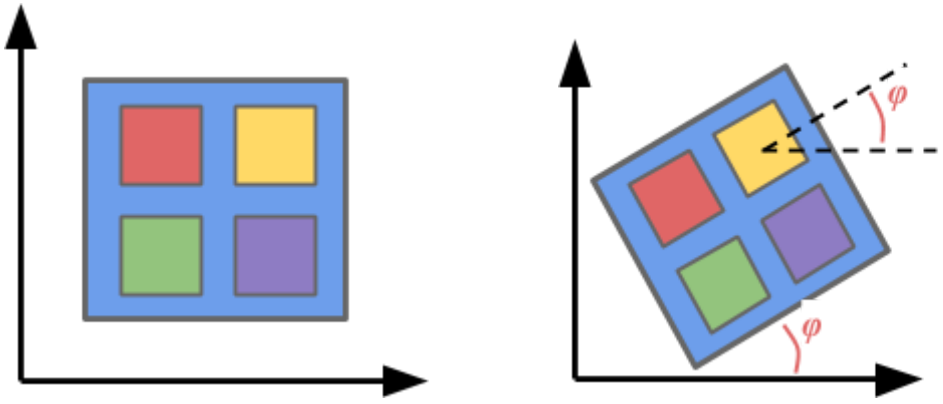


рис 1.1

Быстроту изменения угла поворота, то есть скорость вращения тела вокруг оси вращения, показывает *угловая скорость* (ω , измеряется в радианах в секунду); быстроту изменения угловой скорости показывает *угловое ускорение* (ε , измеряется в радианах в секунду в секунду).

Существует два вида вращательного движения: равномерное и неравномерное вращение. При равномерном вращении угловое ускорение тела равно нулю, вследствие чего угловая скорость остается неизменной. Среди неравномерного вращения выделяют равноускоренное, при котором тело имеет постоянное угловое ускорение и угловая скорость непрерывно и равномерно изменяется. Ниже находится таблица "*Формулы равномерного и равноускоренного вращения*", в которой для каждого из этих двух видов вращения приведены формулы для нахождения *угла поворота* и *угловой скорости*.

Формулы равномерного и равноускоренного вращения

Равномерное вращения			Равноускоренное вращение		
$\varphi = \varphi_0 \pm \omega \cdot t$	*rad*	$\Rightarrow \varphi$	$\varphi = \varphi_0 \pm \omega_0 \cdot t \pm \varepsilon \cdot t^2 /2$	*rad*	$\Rightarrow \varphi$
$\omega = const$	*rad/s*	$\Rightarrow \omega$	$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon \cdot t$	*rad/s*	$\Rightarrow \omega$
$\varepsilon = 0$	rad/s^2	$\Rightarrow \varepsilon$	$\varepsilon = const$	rad/s^2	$\Rightarrow \varepsilon$

Параграф 2. Динамика вращательного движения

Основное уравнение динамики вращательного движения

Основной задачей динамики вращательного движения является нахождение углового ускорения, для чего существует аналог второго закона Ньютона. Ниже представлена таблица “*Формулы динамики поступательного и вращательного движения*”, в которой приведена классическая запись второго закона Ньютона для поступательного движения и его аналог для вращательного.

Формулы динамики поступательного и вращательного движения

Поступательное движение			Вращательное движение		
$\overline{F} = m \cdot \overline{a} \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{F}/m$			$\overline{M} = I \cdot \overline{\varepsilon} \Leftrightarrow \overline{\varepsilon} = \overline{M}/I$		
$\overline{F}$	m	$\overline{a}$	$\overline{M}$	I	$\overline{\varepsilon}$
сила	масса	линейное ускорение	момент силы	момент инерции	угловое ускорение

Аналогом силы в данном уравнении является *момент сил*, а аналогом массы - *момент инерции*. Но прежде чем приступить к детальному изучению каждой из этих физический величин, необходимо разобраться еще с одним понятием, напрямую связанным с динамикой и кинематикой вращательного движения - *центром масс*.

Центр масс

Если тело никак не зафиксировано, то при его вращательном движении точкой, относительно которой происходит вращение, является *центр масс*.

Ниже представлены две таблицы: “*Формулы для расчета координат центра*

масс по осям” и “*Формула для расчета радиус-вектора центра масс”* - в первой приведены формулы для расчета координаты центр масс отдельно по оси X и по оси Y, во второй таблице - формула, по которой считается *радиус-вектор* центра масс.

Радиус-вектор - вектор, идущий из некоторой заранее фиксированной точки, называемой началом координат, в координаты нужной нам точки.

Формулы для расчета координат центра масс по осям

По оси X			По оси Y		
$x_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i / \sum_{i=1}^{n} m_i$			$y_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i / \sum_{i=1}^{n} m_i$		
x_c	m_i	x_i	y_c	m_i	y_i
Координата центра масс	Масса i-й точки	Координата i-й точки	Координата центра масс	Масса i-й точки	Координата i-й точки

Формула для расчета радиус-вектора центра масс

По оси X + По оси Y		
$r_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i / \sum_{i=1}^{n} m_i$		
r_c	m_i	r_i
радиус-вектор центра масс	Масса i-й точки	**радиус-вектор** i-й точки

Момент сил

Подобно тому, как сила заставляет объект ускоряться в линейной кинематике,

момент силы придает объекту угловое ускорение. Момент силы является вектором, перпендикулярным как силе, так и ее плечу. Считается он по следующей формуле:

Формула для подсчета момента силы

$\overline{M}(\overline{F}) = \overline{F} \cdot L$		
$\overline{M}(\overline{F})$	$\overline{F}$	L
момент силы $\overline{F}$	сила	*плечо силы* $\overline{F}$

Плечо силы - это кратчайшее расстояние (перпендикуляр) от точки, относительно которой происходит вращение, до линии действия силы (*рис 2.4*).

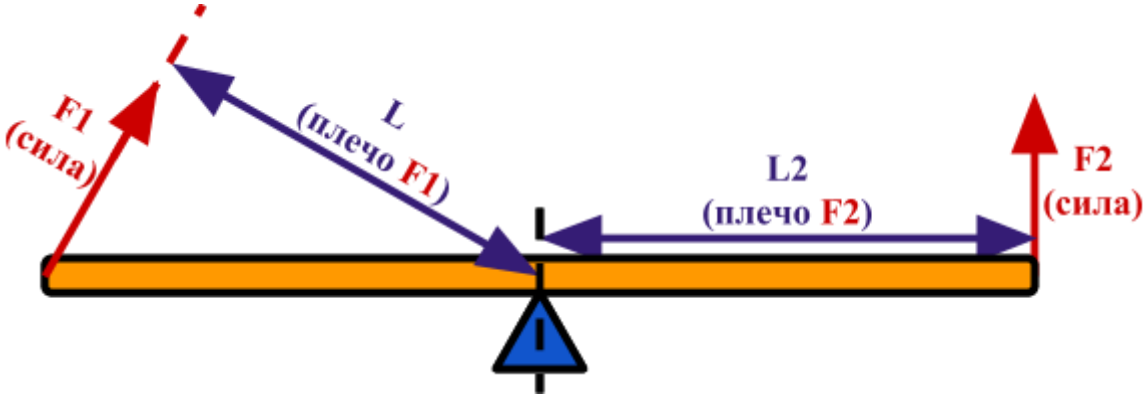


рис 2.4

Если на тело действуют несколько сил, то итоговый момент будет равен сумме моментов каждой силы.

Момент инерции

Момент инерции - это скалярная величина, которая показывает, насколько сложно изменить угловую скорость объекта вокруг оси вращения. Момент инерции считается по следующей формуле:

Формула для подсчета момента инерции

$I = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2$		
I_i	m_i	r_i
момент инерции i-й точки	Масса i-й точки	расстояние от i-й точки до оси вращения, то есть до центра масс

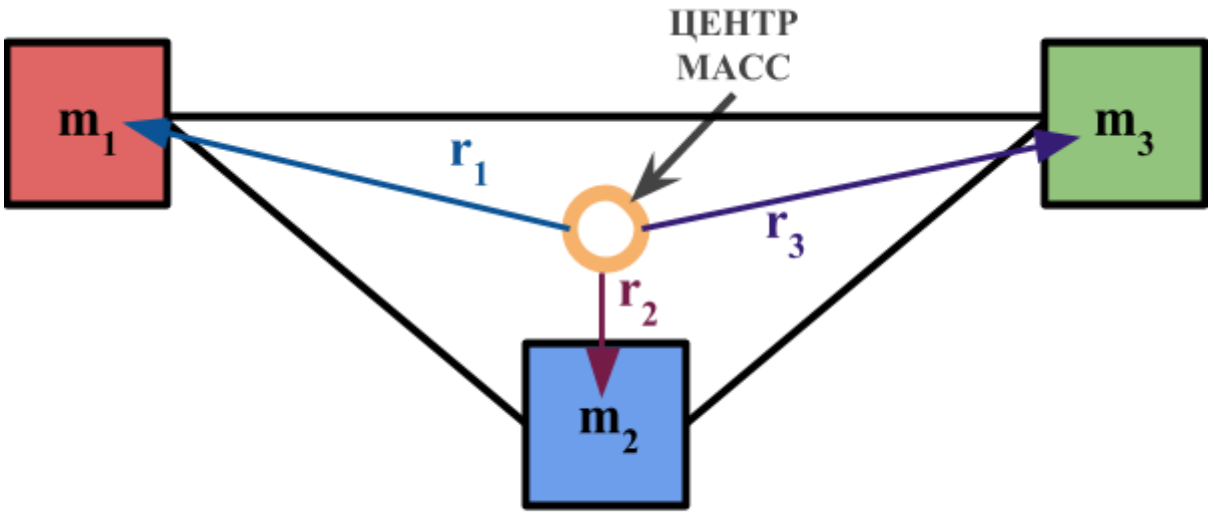


рис 2.5

Глава 2. Описание моделей

Параграф 1. Основа всех моделей

Оболочка всех моделей, основанных на кинематике вращательного движения, одинакова и представляет собой обычный прямоугольник, обладающий угловой скоростью и угловым ускорением (*рис 2.1*).

УСКОРЕНИЕ	-0.0005999999999999998
СКОРОСТЬ	0.18950000000000006
УГОЛ	50.068600000000096
ЦЕЛЕВАЯ СКОРОСТЬ	0.17831777777777735
ЦЕЛЕВОЕ УСКОРЕНИЕ	-0.0005891111111111347

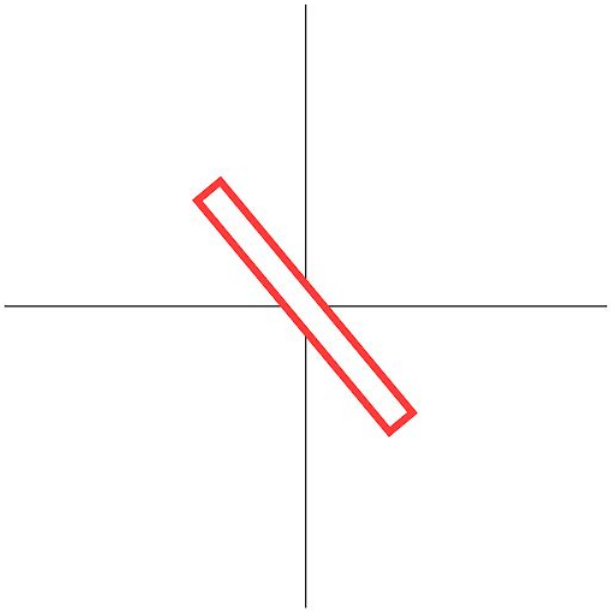


рис. 2.1

Изначально прямоугольник находится в горизонтальном положении, при этом мы сообщаем ему целевой угол, на который он должен повернуться, и за счет

вложенного в программу алгоритма, индивидуального для каждой модели, прямоугольник совершает поворот. Важно понимать, что поскольку речь идет о кинематике вращательного движения, то никакой массы прямоугольник не имеет и двигаться поступательно не может (иными словами он закреплен своим центром в определенной точке экрана).

Равномерное вращение в моделях рассматриваться не будет, поскольку без углового ускорения нет связи с динамикой вращательного движения. Изменения ускорения в свою очередь будет происходить не просто путем увеличения или уменьшения в зависимости от того, больше целевой угол текущего или нет, а за счет алгоритма, в основе которого заложен принцип пропорционального регулятора.

Параграф 2. Пропорциональный регулятор

Пропорциональный регулятор предназначен для изменения какого-то параметра с целью приблизить его значение от текущего к желаемому. В случае с вращательным движением этим параметром является угол поворота. *Напрямую* на угол поворота может влиять только *угловая скорость*, соответственно, мы можем регулировать угол путем изменения угловой скорости.

Разница между текущим и целевым углом называется *ошибкой* (e), а величина изменения угловой скорости - *управляющим воздействием* (u), между которыми существует определенная зависимость через коэффициент.

Существует два вида такой зависимости: линейная (прямой пропорциональностью) и кубическая (кубической параболой). В обоих случаях в формуле этой зависимости присутствует как минимум один коэффициент, который мы используем для преобразования ошибки в управляющее воздействие.

В случае с линейной зависимостью, формула такого преобразования будет выглядеть как $u = k \cdot e$, и график такой функции - прямая, проходящая через центр координат (*рис. 2.2*).

Кубическая зависимость задается формулой $u = k_1 \cdot e + k_2 \cdot e^3$ (*рис. 2.3*). Здесь используются сразу два коэффициента и ошибка берется в кубе.

Перед тем, как приступить к изучению различий между этими видами зависимости экспериментальным путем, мы выдвинем гипотезу:

“При кубической зависимости в формуле ошибка берется как в первой, так и в третьей степени. Таким образом, если ошибка мала, то и куб ее чрезвычайно мал, соответственно управляющее воздействие будет минимальным, в то время как при большом отклонении от целевого угла управляющее воздействие сильно возрастет. Это должно привести к резкому ускорению на старте поворота, и резкому торможению при приближении к целевому углу”.

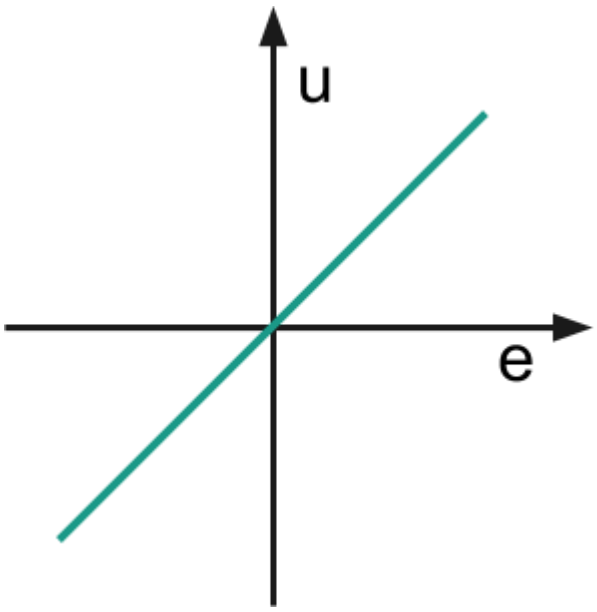


рис. 2.2

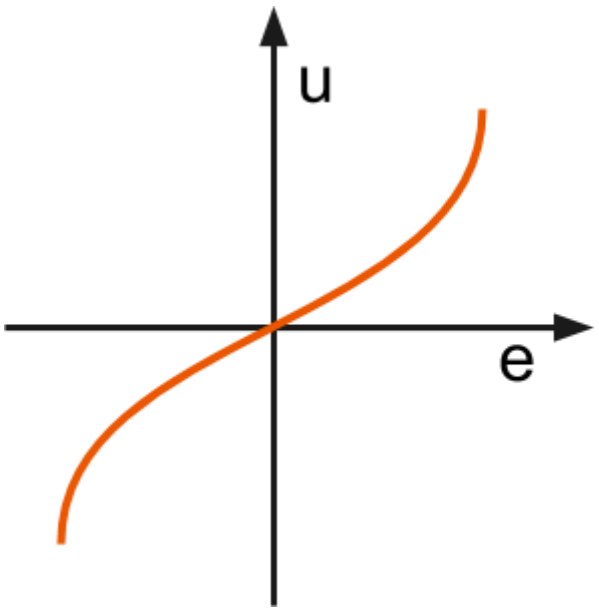


рис. 2.3

Что такое коэффициент k и где его взять?

Коэффициент для каждой модели индивидуален и подбирается экспериментальным путем. Предположительно его величина влияет на погрешность и время поворота. Именно поэтому для каждой модели мы будем подбирать серию из коэффициентов, чтобы определить, каким именно образом осуществляется это влияние.

Параграф 3. Классификация моделей

В кинематике вращательного движения мы рассмотрим восемь возможных моделей с восемью индивидуальными для каждой модели алгоритмами поворота. Модели классифицируются по трем основным критериям:

1. Вид вращения:
    a. ускоренное:
        i. ускорение - $const$.
        ii. ускорение считается по формуле для пропорционального регулятора.
    b. ускоренное^2:
        i. скорость изменения ускорения (υ_ε) - $const$.
        ii. скорость изменения ускорения (υ_ε) считается по формуле для пропорционального регулятора.
2. Вид зависимости управляющего воздействия от ошибки:
    a. линейная.
    b. кубическая.
3. Способ изменения управляющего воздействия:
    a. управляющее воздействие считается по формуле для пропорционального регулятора.
    b. *целевое* управляющее воздействие считается по формуле для пропорционального регулятора, а текущее изменяется в сторону целевого за счет константы.

Линейная зависимость

Начнем с линейной зависимости. Ниже представлена таблица “*Модели, основанные на линейной зависимости*”, в которой разными цветами обозначены

четыре основные модели, а также разъяснены новые символьные обозначения, которые мы часто будем использовать. В дальнейшем мы подробно разберем каждую из моделей, запишем их формулы и алгоритмы в программу с прямоугольником (*рис. 2.1*) и проведем замеры времени и погрешности поворота на разные углы при разных коэффициентах.

Модели, основанные на линейной зависимости

Изменение управ. воздействия	Ускоренное вращение		Ускоренное[2] вращение	
	Формулы	Алгоритм	Формулы	Алгоритм
Через const	$\tau\omega = \Delta\varphi \cdot k_1$	*если* $\Delta\omega > 0$, *то* $\omega = \omega + const$ *если* $\Delta\omega > 0$, *то* $\omega = \omega - const$	$\tau\omega = \Delta\varphi \cdot k_1$ $\tau\varepsilon = \Delta\omega \cdot k_2$	*если* $\Delta\varepsilon > 0$, *то* $\varepsilon = \varepsilon + const$ *если* $\Delta\varepsilon > 0$, *то* $\varepsilon = \varepsilon - const$
По формуле	$\tau\omega = \Delta\varphi \cdot k_1$ $\tau\varepsilon = \Delta\omega \cdot k_2$	*если* $\Delta\omega > 0$, *то* $\omega = \omega + \tau\varepsilon$ *если* $\Delta\omega > 0$, *то* $\omega = \omega - \tau\varepsilon$	$\tau\omega = \Delta\varphi \cdot k_1$ $\tau\varepsilon = \Delta\omega \cdot k_2$ $\upsilon_\varepsilon = \Delta\varepsilon \cdot k_3$	*если* $\Delta\varepsilon > 0$, *то* $\varepsilon = \varepsilon + \upsilon_\varepsilon$ *если* $\Delta\varepsilon > 0$, *то* $\varepsilon = \varepsilon - \upsilon_\varepsilon$

Цвет	Кодовые название модели
	“ПРУД”
	“МОРЕ”
	“МОХ”
	“КУСТ”

Символ	Значение в формуле и алгоритме
$\Delta\varphi$	= целевой угол поворота − текущий угол поворота
$\Delta\omega$	= целевая угловая скорость − текущая угловая скорость
$\Delta\varepsilon$	= целевое угловое ускорение − текущее угловое ускорение
$\tau\omega$	целевая угловая скорость
$\tau\varepsilon$	целевое угловое ускорение

υ_ε	скорость изменения углового ускорения

Однако после первых тестирований оказалось, что алгоритмы, описанные в этой таблице являются абсолютно непригодными для поворота на заданный угол. Проблема заключается в том, что прямоугольник на старте очень сильно разгоняется, не успевает вовремя затормозить и перелетает через целевой угол. Причем перелет этот весьма немалый и составляет от 30 до 100 градусов. Таким образом, нам необходимо ограничить величину угловой скорости и углового ускорения, задать программе их максимальные значения.

Однако в этом случае мы сталкиваемся с слишком большим количеством комбинаций величин, поскольку теперь нам придется менять не только коэффициент (k), но и максимальную угловую скорость (ω_m) с максимальным угловым ускорением (ε_m). Поэтому необходимо внести в формулу для расчетов целевой угловой скорость (и целевого углового ускорения в тех моделях, где это предполагается) знания о ω_m и ε_m, чтобы они служили не просто ограничителями вращения, но и принимали участие в расчетах в качестве дополнительных коэффициентов.

Экспериментальным путем было установлено, что преобразованные формулы должны выглядеть следующим образом:

Итоговые формулы для моделей, основанных на линейной зависимости

Изменение управ. воздействия	Ускоренное вращение	Ускоренное[2] вращение
	Формулы	
Через const	$\tau\omega = \Delta\varphi \cdot \frac{\omega_m}{k}$	$\tau\omega = \Delta\varphi \cdot \frac{\omega_m}{k}$ $\tau\varepsilon = \Delta\omega \cdot \frac{\varepsilon_m}{\omega_m}$

По формуле	$\tau\omega = \Delta\varphi \cdot \frac{\omega_m}{k}$ $\tau\varepsilon = \Delta\omega \cdot \frac{\varepsilon_m}{\omega_m}$	$\tau\omega = \Delta\varphi \cdot \frac{\omega_m}{k}$ $\tau\varepsilon = \Delta\omega \cdot \frac{\varepsilon_m}{\omega_m}$ $\upsilon_\varepsilon = \Delta\varepsilon \cdot \frac{\upsilon_{\varepsilon m}}{\varepsilon_m}$

Кубическая зависимость

Рассматривая кубическую зависимость, мы сразу сталкиваемся с следующей проблемой: коэффициентов в формуле два, и если при линейной зависимости мы смогли включить в формулу для пропорционального регулятора максимальную угловую скорость и максимальное угловое ускорение, то здесь, к сожалению, не удалось выявить особой формулы.

Поэтому решено было оставить все формулы в том же виде, в каком они были при линейной зависимости, и просто добавить часть с кубом ошибки, взятой с отдельным коэффициентом. При этом алгоритмы остались идентичными тем, которые вы можете посмотреть в таблице “*Модели, основанные на линейной зависимости*”.

Формулы для моделей, основанных на кубической зависимости

Изменение управ. воздействия	Ускоренное вращение	Ускоренное^2 вращение
	Формулы	
Через const	$\tau\omega = \Delta\varphi \cdot \frac{\omega_m}{k_1} + \Delta\varphi^3 \cdot k_2$	$\tau\omega = \Delta\varphi \cdot \frac{\omega_m}{k_1} + \Delta\varphi^3 \cdot k_2$ $\tau\varepsilon = \Delta\omega \cdot \frac{\varepsilon_m}{\omega_m} + \Delta\omega^3 \cdot k_3$
По формуле	$\tau\omega = \Delta\varphi \cdot \frac{\omega_m}{k_1} + \Delta\varphi^3 \cdot k_2$ $\tau\varepsilon = \Delta\omega \cdot \frac{\varepsilon_m}{\omega_m} + \Delta\omega^3 \cdot k_3$	$\tau\omega = \Delta\varphi \cdot \frac{\omega_m}{k_1} + \Delta\varphi^3 \cdot k_2$ $\tau\varepsilon = \Delta\omega \cdot \frac{\varepsilon_m}{\omega_m} + \Delta\omega^3 \cdot k_3$ $\upsilon_\varepsilon = \Delta\varepsilon \cdot \frac{\upsilon_{\varepsilon m}}{\varepsilon_m} + \Delta\varepsilon^3 \cdot k_4$
Цвет	Кодовое название модели	
	“АРБУЗ”	

	“ЛИМОН”
	“ЛИС”
	“ФАЗАН”

Параграф 4. Условия пригодности коэффициентов

Перед тем, как приступать к запускам моделей и подбору коэффициентов, необходимо определить первоначальные условия, при выполнении которых мы будем проводить дальнейшие замеры:

1. При первых запусках было обнаружено, что при некоторых значениях коэффициента модель не способна повернуть на угол в 1°. Поэтому первым условием, проверяющим пригодность коэффициента, будет способность модели повернуть на единичный угол.
2. Очень часто при повороте на какой-либо угол модель совершает небольшие колебания. Например, если мы зададим целевой угол в 60°, модель может дойти до 50°, затем вернуться к 48° и уже после этого долететь до 60°. Если подобные колебания происходят при определенном коэффициенте, то мы перестаем рассматривать его для дальнейших замеров.
3. Исключены перелеты через целевой угол, даже при том условии, что модель вернется к нему. Например, достаточно распространенным явлением оказался перелет на $0,5^\circ$, после которого модель возвращалась к целевому углу.
4. Коэффициент считается пригодным к рассмотрению, только если модель при достижении угла, максимально близкого к целевому, полностью останавливается. Иногда возникали следующие казусы: мы просим модель повернуть на 30°, она долетает до $29,962^\circ$ и начинает колебаться между $29,9615^\circ$ и $29,9625^\circ$. При таком явлении дальнейшие измерения с данным коэффициентом не проводятся.
5. Погрешность поворота не должна превышать $0,9^\circ$.

Параграф 5. Методика исследования

Помимо коэффициентов во всех моделях есть еще две контролируемые величины: максимальная угловая скорость и максимальное угловое ускорение. Поскольку нашей задачей является не только исследование влияния коэффициента на время и погрешность поворота, но еще и разработка самой быстрой и точной в поворотах модели, мы должны менять максимальные угловую скорость и угловое ускорение в соответствии с этой целью.

Иными словами, нам необходимо определить, какая величина оказывает прямое влияние на скорость поворота - это угловая скорость. Поэтому методика исследования будет выглядеть следующим образом: мы увеличиваем угловую скорость и в соответствии с этим регулируем угловое ускорение и сам коэффициент.

Измерения проводились на 25 основных углах: 1, 15, 30, 45, …, 345, 360. Такого количества углов достаточно, чтобы на графике было видно, какой из наборов коэффициентов обеспечивает более быстрые повороты.

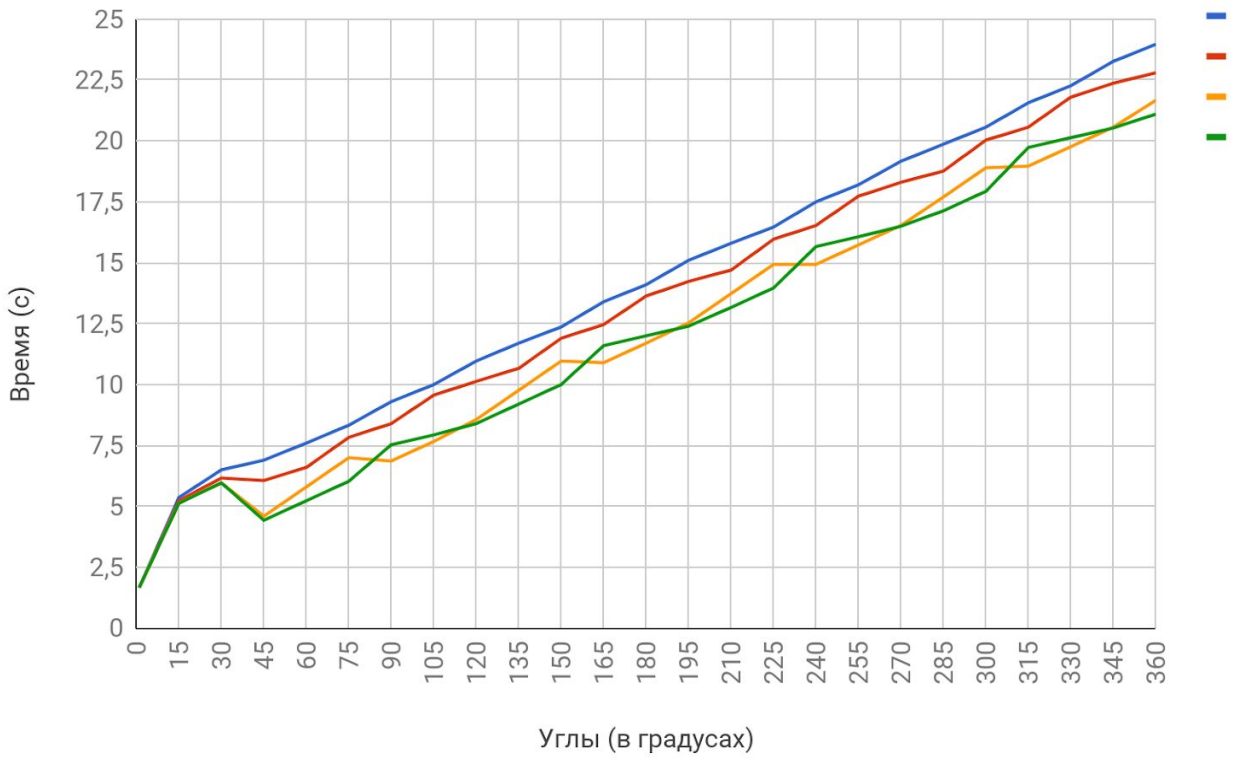
Глава 3. Исследование

Параграф 1. Линейная зависимость

Модель “ПРУД”

Формулы и алгоритм модели

Формулы	Алгоритм
$\tau\omega = \Delta\varphi \cdot \frac{\omega_m}{k}$	*если* $\Delta\omega > 0$, *то* $\omega = \omega + const$ *если* $\Delta\omega > 0$, *то* $\omega = \omega - const$



Всего было подобрано четыре комбинации коэффициентов, в последней из которых представлена предположительно максимальная, возможная для данной модели скорость (дальнейший подбор не принес никаких результатов). Выше представлен график изменения времени при повороте на разные углы при разных наборах коэффициентов. На горизонтальной оси отмечены углы в градусах, на

вертикальной - время поворота в секундах. Линиями разного цвета обозначено изменение времени поворота на разные углы для разных наборов коэффициентов (каждая линия - отдельный набор).

От набора к набору мы увеличивали максимальную угловую скорость, и это приводило к следующим тенденциям:

1. Коэффициент приходилось также увеличивать, поскольку при малых его значениях модель перелетала через целевой угол.
2. Изменять максимальное угловое ускорение не получалось, поскольку при малейших его изменениях модель уже не могла остановиться при достижении максимально близкого к целевому угла, а начинала колебаться.
3. При уменьшении коэффициента уменьшалась и погрешность поворота, при увеличении - увеличивалась:

№ набора	Коэффициент	Средняя погрешность
1 (синий график)	20	0,3306
2 (красный график)	19	0,31
3 (желтый график)	18,8	0,2444
4 (зеленый график)	19,5	0,2488

Модель “МОРЕ”

Формулы и алгоритм модели

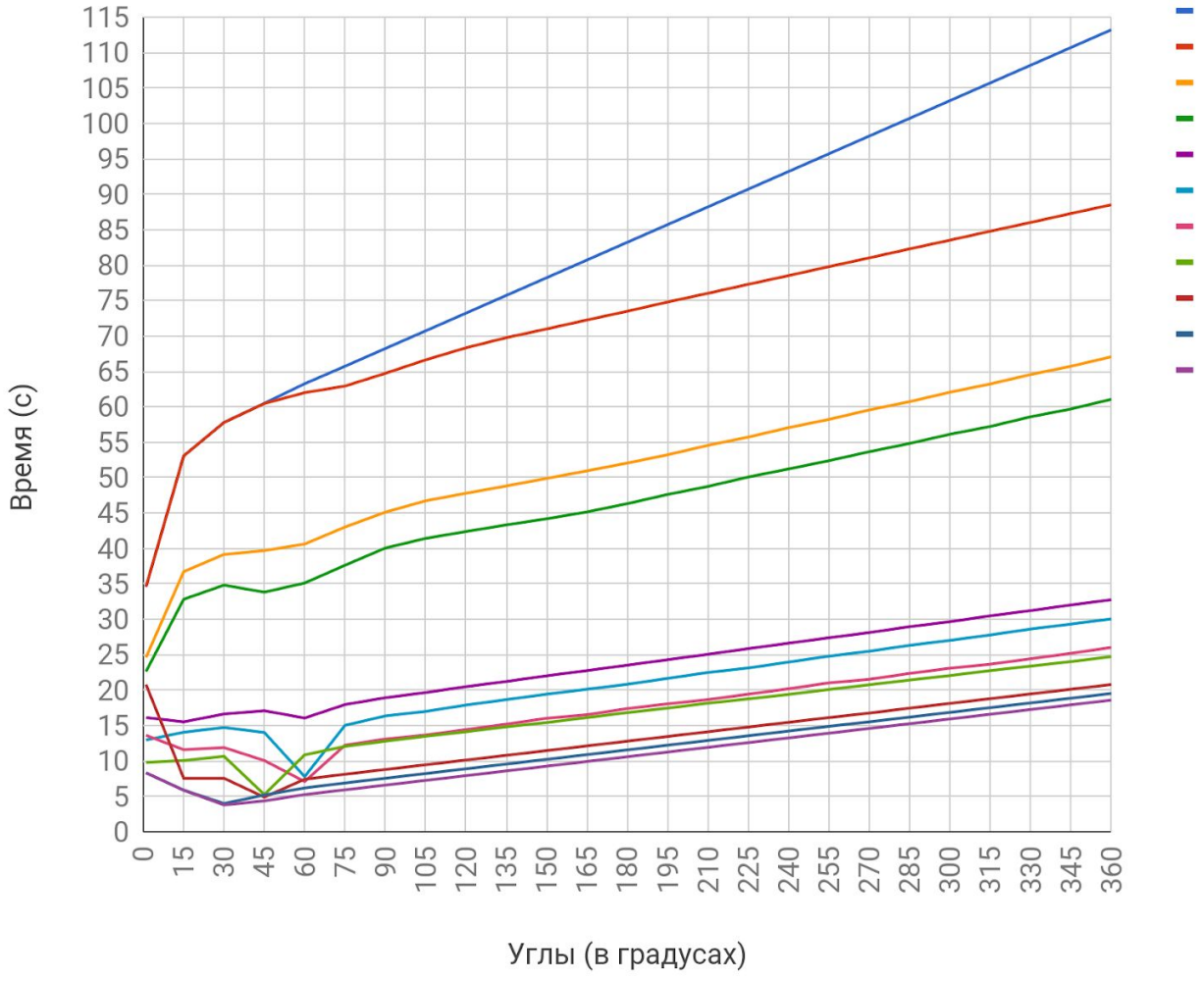
Формулы	Алгоритм
$\tau\omega = \Delta\varphi \cdot \frac{\omega_m}{k}$ $\tau\varepsilon = \Delta\omega \cdot \frac{\varepsilon_m}{\omega_m}$	*если* $\Delta\omega > 0$, *то* $\omega = \omega + \tau\varepsilon$ *если* $\Delta\omega > 0$, *то* $\omega = \omega - \tau\varepsilon$

К сожалению, подобрать соответствующие описанным в четвертом параграфе второй главы (“Условия пригодности коэффициентов”) условиям коэффициенты для этой модели не удалось. Модель, подлетая к целевому углу, начинает безостановочно колебаться.

Модель “MOX”

Формулы и алгоритм модели

Формулы	Алгоритм
$\tau\omega = \Delta\varphi \cdot \frac{\omega_m}{k}$ $\tau\varepsilon = \Delta\omega \cdot \frac{\varepsilon_m}{\omega_m}$	$если\ \ \Delta\varepsilon > 0\,, то\ \ \varepsilon = \varepsilon + const$ $если\ \ \Delta\varepsilon > 0\,, то\ \ \varepsilon = \varepsilon - const$



От набора к набору мы увеличивали максимальную угловую скорость, и это приводило к следующим тенденциям:

1. Коэффициент приходилось также увеличивать, поскольку при малых его значениях модель перелетала через целевой угол.
2. Максимальное угловое ускорение приходилось также увеличивать.
3. Чтобы избежать возможность перелета через целевой угол необходимо было соблюсти определенное соотношение между коэффициентом и максимальным угловым ускорением. Количественно это соотношение не было установлено, однако качественно его можно определить следующим правилом: коэффициент надо уменьшать, а максимальное угловое ускорение - увеличивать:

№ набора	Коэффициент	Максимальное угловое ускорение
1	45	0,01
2	90	0,02
3	60	0,02
4	55	0,018
5	50	0,03
6	46	0,03
7	43	0,035
8	40	0,048
9	33	0,0495
10	27	0,06
11	26,6	0,06

4. Правило “при уменьшении коэффициента уменьшается и погрешность поворота, при увеличении - увеличивается” сохранялось, однако эффект его снизился. Таким образом, хоть погрешность практически с каждым набором и

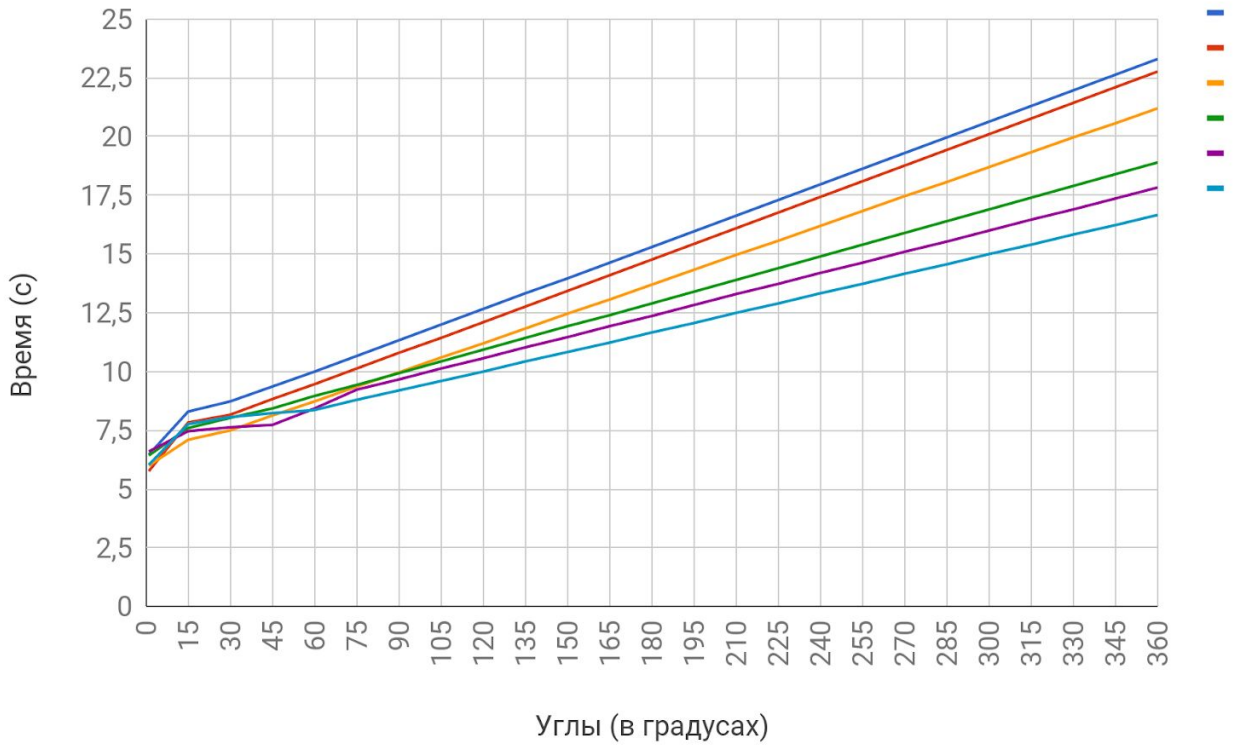
увеличивалось, встречались случаи, где уменьшение коэффициента приводило к меньшей погрешности. В представленной ниже таблице такие случаи будут выделены серым цветом:

№ набора	Коэффициент	Средняя погрешность
1	45	0,02237
2	90	0,02237
3	60	0,01486
4	55	0,0133
5	50	0,0375
6	46	0,345
7	43	0,041356
8	40	0,0512
9	33	0,06148
10	27	0,06888
11	26,6	0,06624

Модель “КУСТ”

Формулы и алгоритм модели

Формулы	Алгоритм
$\tau\omega = \Delta\varphi \cdot \frac{\omega_m}{k}$ $\tau\varepsilon = \Delta\omega \cdot \frac{\varepsilon_m}{\omega_m}$ $\upsilon_\varepsilon = \Delta\varepsilon \cdot \frac{\upsilon_{\varepsilon m}}{\varepsilon_m}$	*если* $\Delta\varepsilon > 0$, *то* $\varepsilon = \varepsilon + \upsilon_\varepsilon$ *если* $\Delta\varepsilon > 0$, *то* $\varepsilon = \varepsilon - \upsilon_\varepsilon$



Особенностью конкретно данной модели является то, что погрешность при всех подобранных наборах коэффициентов была одинаковой и равной $0,0001^{\circ}$. При этом основные тенденции изменения контролируемых величин этой модели идентичны уже ранее описанным:

1. При увеличении максимальной угловой скорости необходимо увеличивать коэффициент.
2. При увеличении коэффициента необходимо увеличивать максимальное угловое ускорение.

Вывод

Все модели, основанные на линейной зависимости, обладают одинаковыми особенностями в подборе коэффициентов:

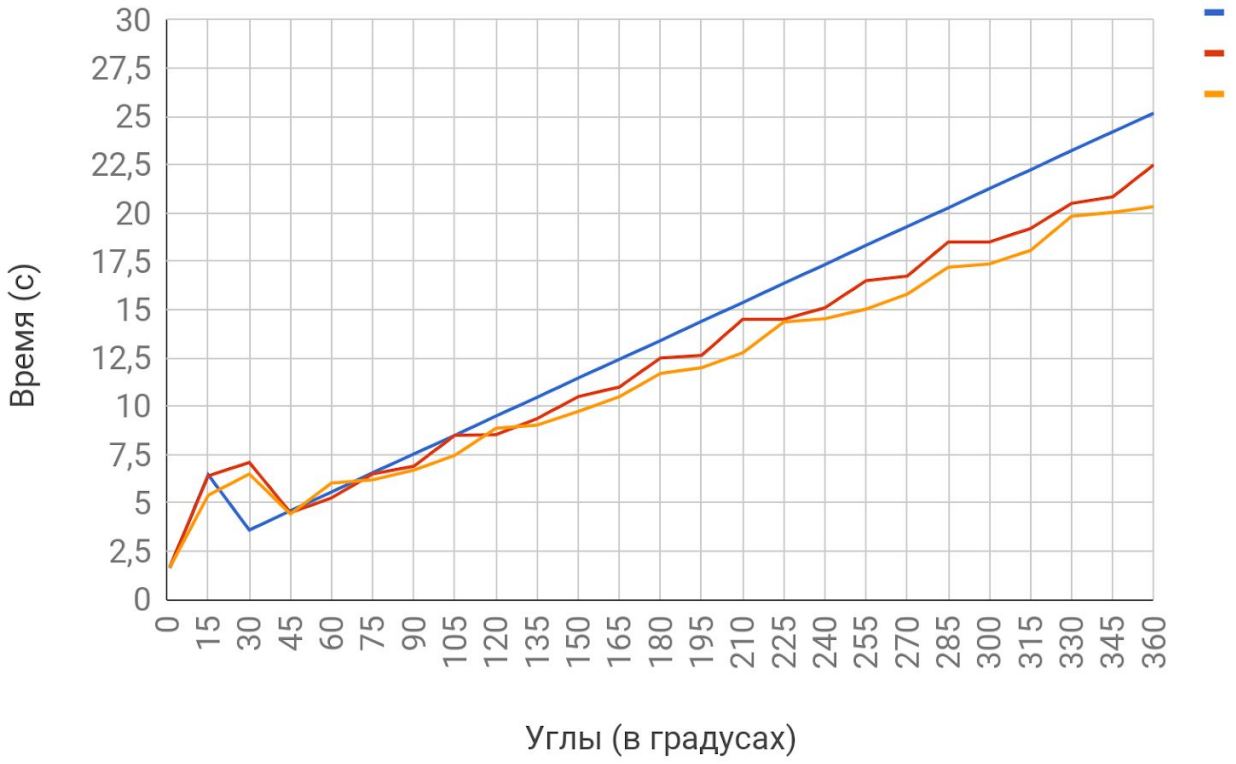
1. Чем меньше коэффициент, тем меньше погрешность.
2. Чем меньше коэффициент, тем быстрее поворот.
3. Чем меньше угловое ускорение, тем быстрее поворот.

Параграф 2. Кубическая зависимость

Модель “АРБУЗ”

Формулы и алгоритм модели

Формулы	Алгоритм
$\tau\omega = \Delta\varphi \cdot \frac{\omega_m}{k_1} + \Delta\varphi^3 \cdot k_2$	*если* $\Delta\omega > 0$, *то* $\omega = \omega + const$ *если* $\Delta\omega > 0$, *то* $\omega = \omega - const$

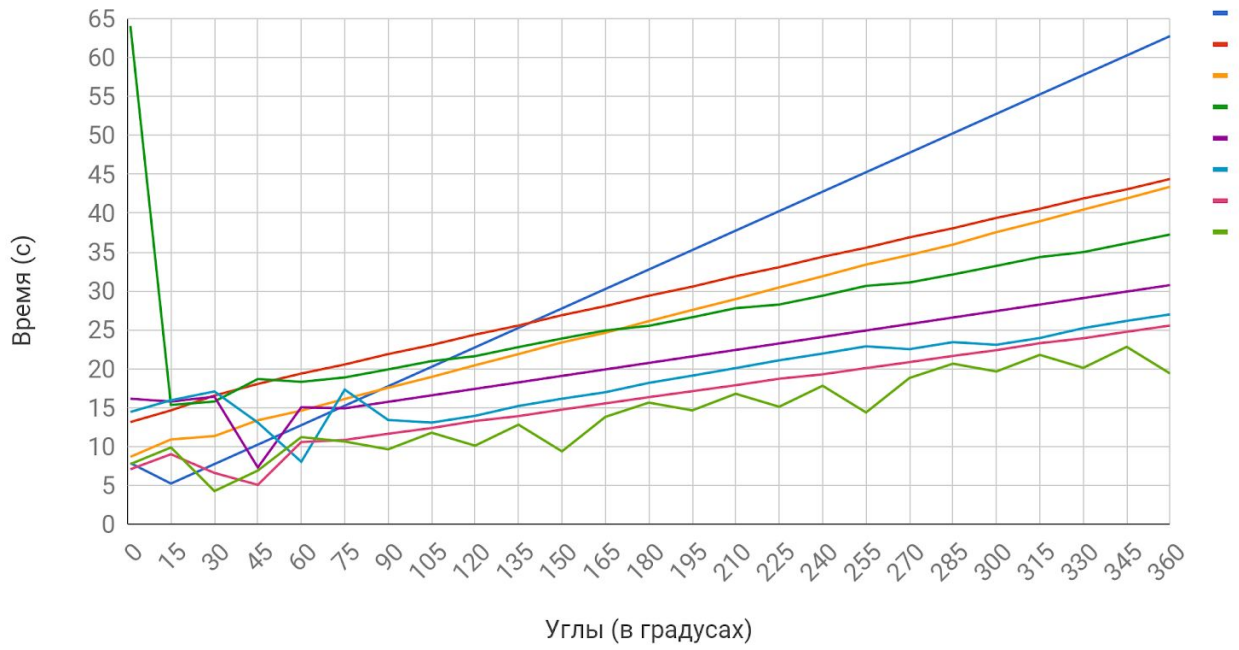


Основные особенности подбора коэффициентов для данной модели абсолютно идентичны особенностям, описанным для модели “ПРУД”. Единственная тенденция, связанная с наличием в формуле для пропорционального регулятора у этой модели двух коэффициентов, заключается в том, что второй коэффициент (с которым берется куб ошибки) с каждым набором уменьшался.

Модель “ЛИС”

Формулы и алгоритм модели

Формулы	Алгоритм
$\tau\omega = \Delta\varphi \cdot \frac{\omega_m}{k_1} + \Delta\varphi^3 \cdot k_2$ $\tau\varepsilon = \Delta\omega \cdot \frac{\varepsilon_m}{\omega_m} + \Delta\omega^3 \cdot k_3$	*если* $\Delta\varepsilon > 0$, *то* $\varepsilon = \varepsilon + const$ *если* $\Delta\varepsilon > 0$, *то* $\varepsilon = \varepsilon - const$



Основные особенности подбора коэффициентов для данной модели абсолютно идентичны особенностям, описанным для модели “МОХ”. Из тенденций, характерных конкретно для кубической зависимости, можно выделить следующую: “При слишком сильном снижении коэффициента k_1 в моделях, основанных на линейной зависимости, мы сталкивались с перелетом модели через целевой угол. Однако при кубической зависимости мы можем компенсировать снижение коэффициента k_1 за счет уменьшения коэффициента k_3”.

Модель “ЛИМОН”

Формулы и алгоритм модели

Формулы	Алгоритм
$\tau\omega = \Delta\varphi \cdot \frac{\omega_m}{k_1} + \Delta\varphi^3 \cdot k_2$ $\tau\varepsilon = \Delta\omega \cdot \frac{\varepsilon_m}{\omega_m} + \Delta\omega^3 \cdot k_3$	*если* $\Delta\omega > 0$, *то* $\omega = \omega + \tau\varepsilon$ *если* $\Delta\omega > 0$, *то* $\omega = \omega - \tau\varepsilon$

Подобрать коэффициенты для данной модели не удалось по тем же причинам, по которым не удалось это сделать для модели “МОРЕ”. Коэффициенты не соответствуют условиям, описанным в четвертом параграфе второй главы, и модель не останавливается при достижении максимально близкого к целевому угла, а совершает бесконечные колебания.

Модель “ФАЗАН”

Формулы и алгоритм модели

Формулы	Алгоритм
$\tau\omega = \Delta\varphi \cdot \frac{\omega_m}{k_1} + \Delta\varphi^3 \cdot k_2$ $\tau\varepsilon = \Delta\omega \cdot \frac{\varepsilon_m}{\omega_m} + \Delta\omega^3 \cdot k_3$ $\upsilon_\varepsilon = \Delta\varepsilon \cdot \frac{\upsilon_{\varepsilon m}}{\varepsilon_m} + \Delta\varepsilon^3 \cdot k_4$	*если* $\Delta\varepsilon > 0$, *то* $\varepsilon = \varepsilon + \upsilon_\varepsilon$ *если* $\Delta\varepsilon > 0$, *то* $\varepsilon = \varepsilon - \upsilon_\varepsilon$

Для данной модели также не удалось подобрать коэффициенты и по тем же причинам: колебания при достижении максимально близкого к целевому угла.

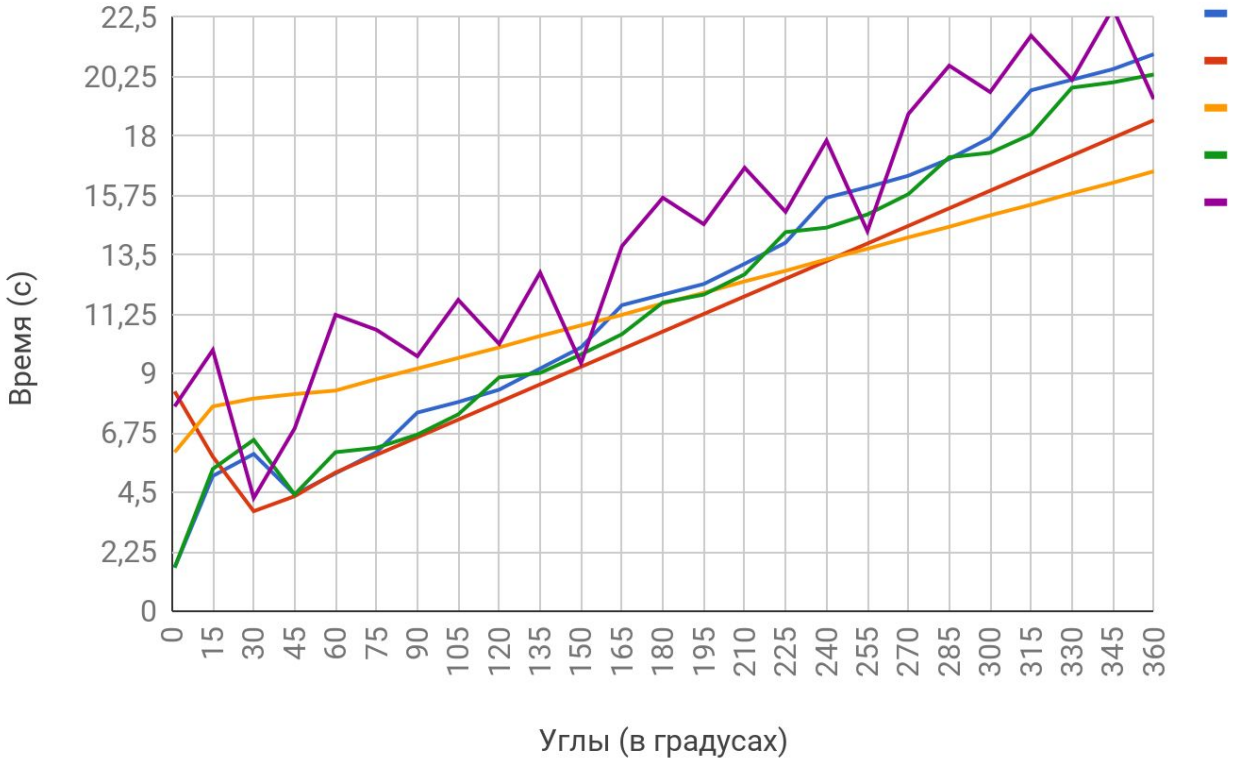
Вывод

Особенностей подбора коэффициентов, характерных именно для кубической зависимости, выявить не удалось. Это, и тот факт, что из четырех возможных моделей нам удалось подобрать коэффициенты лишь для двух, говорит о том, что те формулы, которые мы разработали для линейной зависимости, для кубической не подходят. Необходимо включить максимальную угловую скорость и максимальное угловое ускорение в формулы для кубической зависимости другим способом и выразить через них не только коэффициент при ошибке в первой степени, но и при ошибке в кубе. Каким конкретно образом это сделать пока не ясно.

Параграф 3. Сравнение

После подбора коэффициентов нам необходимо выбрать самую быструю и точную модель. Ниже представлен график, в котором представлены наилучшие наборы коэффициентов из всех пяти моделей:

- синий: модель “ПРУД”.
- красный: модель “МОХ”.
- желтый: модель “КУСТ”.
- зеленый: модель “АРБУЗ”.
- фиолетовый: модель “ЛИС”.



Из графика видно, что самой быстрой моделью является модель “МОХ”, поскольку красный график лежит ниже всех остальных. Поэтому именно формулы и алгоритм этой модели ляжет в основу программы, демонстрирующей действие пропорционального регулятора при динамике вращательного движения. К

сожалению, я не успел написать эту программу, однако оболочка для неё уже готова, и вы можете ознакомиться с ней в приложении.

Заключение

Применение пропорционального регулятора для вращательного движения в среде программирования P5.js оказалось довольно нестабильным и в какой-то степени непредсказуемым. Более того, нахождение коэффициентов путем подбора является невероятно коварным занятием. Однако несмотря на все трудности, нам удалось выявить основные принципы этого подбора, с помощью которых мы смогли неслабо продвинуться в ускорении наших моделей.

Эти принципы справедливы для всех представленных в моей работе алгоритмов и звучат следующим образом:

1. Необходимо по возможности снизить величину коэффициента, поскольку это приведет к уменьшению как погрешности, так и времени поворота.
2. Необходимо по возможности снизить величину максимального углового ускорения, так как это также приведет к уменьшению времени, затраченного на поворот.
3. Уменьшение коэффициента можно компенсировать увеличением максимального углового ускорения: это полезно применять в тех случаях, когда мы можем пожертвовать быстротой ради снижения погрешности, поскольку, как оказалось, на погрешность величина максимального углового ускорения не оказывает прямого влияния.

Также интересным наблюдением является следующий факт: время поворота зависит от коэффициента сильнее, чем от максимального углового ускорения. Допустим, что мы нашли некий баланс между значением коэффициента и значением максимального углового ускорения, и эти значения равны α и β соответственно. В таблице ниже представлено два возможных варианта преобразования этих значений и условное обозначение времени поворота на один и тот же угол.

№	Значение коэффициента	Значение максимального углового ускорения	Время поворота
1	$\alpha + 1$	$\beta - 1$	t_1
2	$\alpha - 1$	$\beta + 1$	t_2

Представим, что в обоих вариантах преобразования баланс между коэффициентом и максимальным угловым ускорением сохраняется. В этом случае абсолютно все алгоритмы демонстрировали следующий результат: $t_2 < t_1$. Таким образом, лучше уменьшать коэффициент и компенсировать это увеличением максимального углового ускорения, чем делать наоборот.

К сожалению, я не успел опробовать выявленный нами наилучший алгоритм на динамике вращательного движения. В кинематике мы изменяем угловое ускорение - в динамике мы изменяем силу. По сути, зная момент инерции нашего объекта и плечи сил, которые к нему прикладываются, мы без проблем можем подогнать модули этих сил таким образом, чтобы полученное по формуле основного уравнения динамики вращательного движения угловое ускорение соответствовало желаемому. Поэтому, предположительно, никакой разницы в погрешности и времени поворота у кинематики и динамики быть не должно. Эта гипотеза интересна и нуждается в дальнейшем рассмотрении.

В заключении важно отметить, что созданные нами алгоритмы работают исключительно с математическими расчетами и не затрагивают какие-либо функции, характерные конкретно для среды программирования P5.js, а это значит, что эти алгоритмы с уже подобранными нами коэффициентами можно использовать в любой среде программирования. Конечно, описание переменных, структура кода и синтаксис в других средах будут отличаться, однако сама логика алгоритма и формулы, которые он в себя включает, останутся неизменными.

Список источников

KHANACADEMY: Rotational kinematics *[Интернет курс]*:
https://www.khanacademy.org/science/physics/torque-angular-momentum/rotational-kinematics/v/angular-motion-variables

KHANACADEMY: Torque, moments and angular momentum *[Интернет курс]*:
https://www.khanacademy.org/science/physics/torque-angular-momentum/torque-tutorial/v/introduction-to-torque

Официальный сайт среды программирования P5.js:
https://p5js.org/reference/

COURSERA: Создание умного робота *[Интернет курс]*:
https://www.coursera.org/learn/roboty-arduino/lecture/SaUrl/5-10-rieghuliator

Приложение

Модель “ПРУД” (программа):
https://www.openprocessing.org/sketch/533233#

Модель “МОХ” (программа):
https://www.openprocessing.org/sketch/446718

Модель “КУСТ” (программа):
https://www.openprocessing.org/sketch/540961

Модель “АРБУЗ” (программа):
https://www.openprocessing.org/sketch/541079

Модель “ЛИС” (программа):
https://www.openprocessing.org/sketch/529545

Оболочка итоговой программы:
https://www.openprocessing.org/sketch/402349