Департамент образования города Москвы

Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение города Москвы

Школа №1505

«Московская городская педагогическая гимназия-лаборатория - Преображенская»

**РЕФЕРАТ**

на тему:

**Диофантовые уравнения**

Выполнил:

Гусев Никита 9 «Б»

Руководитель:

Шалимова Марина Николаевна

Москва

 2017/2018 уч.г.

Оглавление

[Введение 3](#_Toc511904123)

[История вопроса: 3](#_Toc511904124)

[Применение в реальной жизни: 4](#_Toc511904125)

[Проблема реферата: 5](#_Toc511904126)

[Цель реферата: 5](#_Toc511904127)

[Задачи реферата: 5](#_Toc511904128)

[Часть 1. Диофантовые уравнения первой степени 6](#_Toc511904129)

[Какие уравнения называются диофантовыми? 6](#_Toc511904130)

[Конкретные примеры 6](#_Toc511904131)

[Пример из ЕГЭ 8](#_Toc511904132)

[Часть 2. Диофантовы уравнения степени выше первой. 9](#_Toc511904133)

[Решение диофантовых уравнений методом разложения на множители. 9](#_Toc511904134)

[Использование четности 9](#_Toc511904135)

[Пример из ЕГЭ 11](#_Toc511904136)

[Часть 3. Историческая справка 12](#_Toc511904137)

[Заключение 13](#_Toc511904138)

[Список литературы: 14](#_Toc511904139)

[Приложение. 15](#_Toc511904140)

[Упражнения для тренировки. 15](#_Toc511904141)

# Введение

Диофантовы уравнения – это алгебраические уравнения с двумя или более неизвестными с целыми коэффициентами, решение которого ищется в целых или рациональных чисел. Диофантовы уравнения можно представить в следующем виде,

*ax + by = c*

а то есть в виде уравнения, относительно переменных *x* и *y*, придуманных великим древнегреческим математиком Диофантом. Предполагается, что a и b отличны от нуля.

Решение Диофантового уравнения сводится к следующему алгоритму:
• Ответ на вопрос: «Имеет ли уравнение смысл?»;
• Рассмотрение вырожденного случая;
• Нахождение частного решения;
• Получение всех решений.

История вопроса:

Диофа́нт Александри́йский- древнегреческий математик, живший предположительно в III веке н. э. Нередко упоминается как «Отец алгебры». Диофант- автор учебника по математике «Арифметика» в 13 книгах (6 сохранились). Он представляет собой сборник задач, где решаются вопросы из области Теории чисел, изучаются решения диофантовых уравнений. Диофант, ориентируясь на древнеегипетскую или вавилонскую систему счета, отделяет чистую арифметику от геометрии и закладывает основы алгебры.

Комментировать Диофанта начали ещё в древности. Разбору его книг были посвящены труды знаменитой Гипатии, дочери Теона Александрийского. Свое новое «рождение» идеи Диофанта получили в Константинополе, а также на арабском Востоке, откуда проникли в Европу. В 1572 году в «Алгебре» Рафаэля Бомбелли, профессора университета в Болонье, вдруг появляются 143 задачи из «Арифметики» Диофанта. Методы Диофанта обрели новую жизнь только в произведениях двух крупнейших математиков Франции XVI–XVII веков — Франсуа Виета и Пьера Ферма.

 Первый этап развития учения о неопределённых уравнениях второго и третьего порядков, начало которому положил Диофант, нашёл своё завершение в работах Леонарда Эйлера.

 При решении линейных Диофантовых уравнений используется свойства делимости натуральных чисел, которые в полном объеме в рамках школьной программы не изучаются.

 Некоторые вопросы делимости изучаются в шестом классе. В прошлом году я создал проект по теме "Создание программы для решения Диофантовых уравнений первой степени". В этом году я решил продолжить работу в этом направлении, а именно по теме, связанной с решением Диофантовых уравнений высших степеней.

## Применение в реальной жизни:

Областью применения Диофантовых уравнения может быть любая деятельности, в которой объектом рассмотрения является нечто, представимое лишь в целых единицах. Например дома, товары, люди, животные. В этом случае исследования не имеют смысла в терминах обычных(не Диофантовых) уравнений, так как методика отыскания решения в корне отличается от стандартной.

В качестве примера можно привести следующую задачу:

« Условие. В клетке сидят куры и кролики. Всего у них 20 лап. Сколько там может быть кур, а сколько – кроликов?

Решение. Пусть у нас будет x кур и y кроликов. Составим уравнение: 2x+4y=20. Сократим обе части уравнения на два: x+2y=10. Следовательно, x=10-2y,где x и y – это целые положительные числа.

Ответ.Число кроликов и куриц: (1;8),(2;6),(3;4),(4:2),(5,0)

Согласитесь, получилось быстрее, чем перебирать “пусть в клетке сидит один кролик…»[[1]](#footnote-1)

А также диофантовые уравнения являются частью Единого Государственного Экзамена профильного уровня в задании 19.

## Проблема реферата:

Разобраться, как решаются Диофантовые уравнения высших степеней. Определить, существуют ли определенные алгоритмы решения уравнений. И если они существуют, научиться их применять.

## Цель реферата:

Изучить основные методы решения линейных диофантовых уравнений и диофантовых уравнений степени выше первой, а также рассмотреть типовые номера ЕГЭ, в которых для решения необходимо применение навыков решения таких уравнений.

## Задачи реферата:

* Подобрать литературу по данной теме.
* Систематизировать собранную информацию
* Выявить основные методы решения Диофантовых уравнений высших порядков.
* На основании полученных знаний, выделить наиболее универсальные для применения в решении задач школьной программы и, в частности, для номеров ЕГЭ повышенной сложности.

# Часть 1. Диофантовые уравнения первой степени

Какие уравнения называются диофантовыми?

Линейное диофантово уравнение с двумя неизвестными – это уравнение в целых числах вида:
ax + by = c (1)
относительно переменных x и y.
Предполагается, что a и b отличны от нуля.
Решение диофантового уравнения сводится к следующему алгоритму:
• Ответ на вопрос: «Имеет ли уравнение смысл?»;
• Рассмотрение вырожденного случая;
• Нахождение частного решения;
• Получение всех решений
Решением линейного диофантового уравнения называют все решения уравнения (1). Как правило решения таких уравнений записываются в следующей форме:
x=x0+k\*n,
y=y0+l\*n,
где n$\in $ℤ
Причем числа k, l, x0, y0 являются целыми и фиксированными в зависимости от данного уравнения. Любую конкретную пару из этого множества решений называют частным решением данного диофанового уравнения.
Задачи направленные на применение методов решения диофантовых уравнений обычно появляются в школьной программе с 8 класса. Примеры на эту тему часто включают в варианты ОГЭ и ЕГЭ.

Конкретные примеры

1. Рассмотрим уравнение 4x+4y=9
Первое, что мы должны сделать, приступая к решению диофантового уравнения это убедиться в том, что корни вообще существуют.
Диофантово уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда с делится на d, где Н.О.Д.(a,b) = d в уравнении (1), а с - это свободный член.
В нашем случае Н.О.Д.(a,b) = Н.О.Д.(4,4) =4.
С=9 и, очевидно, что 9 не делится на 4, а значит, данное уравнение не имеет решений.
Ответ: нет решений.

2. Рассмотрим уравнение 2x+3y=0
Линейные диофантовы уравнения, в которых c=0 получили отдельное название: однородное линейное диофантово уравнение.
Нетрудно получить, что
x =-1,5y
Так как x должен быть целым числом, то y = 2n , где n - произвольное целое число. Значит, x = - 3n и решениями однородного диофантового уравнения являются все пары вида
{- 3n , 2n }, где n$\in $ℤ

Ответ: {- 3n , 2n }, где n$\in $ℤ

3. Рассмотрим уравнение 2x+3y=5
Убедимся что решения существуют.

НОД(2;3)=1; с=5. Свободный член делится на НОД.
Затем разделим с остатком:

3=2\*1+1
5=2\*2+1

Согласно алгоритму, получаем частное решение y0=1:1=1.
Подставляя это решение в исходное уравнение, находим частное решение x0=(5-3):2=1.

Вычтем из исходного уравнения равенство, полученное подстановкой найденных частных решений в исходное уравнение:

2(x-1)+3(y-1)=5-5
2(x-1)+3(y-1)=0

Решение полученного уравнения найдем аналогично Примеру 2:

x-1=-3n, y-1=2n, где n$\in $ℤ

Ответ: x=1-3n, y=1+2n, где n$\in $ℤ

## Пример из ЕГЭ

Для того, чтобы показать пример диофантовых уравнение первого порядка в задании 19 ЕГЭ, обратимся к сборнику задач с решениями по математике профильного уровня 2017 года по Ю.В.Садовничему.

Итак, задача звучит следующим образом - «целое число кратно 7 и при делении на 4 дает в остатке 3. Найти остаток от деления этого числа на 28.

Решение. Пусть х – данное целое числа. Имеем:

x = 7k = 4n + 3; k, n$\in $ℤ, следовательно n = (7k-3) / 4.

Перебирая все возможные остатки при делении k на 4, находим, что решением последнего уравнения являются k = 4m +1; m$\in Z.$ Таким образом, x = 7k = 4(4m +1) = 28m + 7 и дает остаток 7 при делении на 28.

Ответ: 7.»[[2]](#footnote-2)

# Часть 2. Диофантовы уравнения степени выше первой.

## Решение диофантовых уравнений методом разложения на множители.

**Задача 1.** Решить в целых числах уравнение

*x + y = xy*.

**Решение.** Запишем уравнение в виде $xy-y-x=0$

$$y\left(x-1\right)-\left(x-1\right)-1=0$$

$$\left(x-1\right)\left(y-1\right)=1$$

Произведение двух целых чисел равно 1 только в том случае, когда оба они равны 1. Т. е. исходное уравнение равносильно совокупности

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| http://works.doklad.ru/images/na298o15cHQ/m7f4ff55e.png | http://works.doklad.ru/images/na298o15cHQ/m2c5fcfa4.png | *x* - 1 = 1, |
| *y* - 1 = 1, |
| http://works.doklad.ru/images/na298o15cHQ/m2c5fcfa4.png | *x* - 1 = -1, |
| *y* - 1 = -1, |

с решениями (0,0) и (2,2).

## Использование четности

**Задача 2.** Решить в простых числах уравнение

|  |
| --- |
| *x*2 - 2*y*2 = 1. |

**Решение.** Рассмотрим два случая в зависимости от четности переменной *x*.

a) Пусть *x* - нечетное число. Подстановка *x* = 2*t* + 1 приводит исходное уравне­ние к виду

(2*t* + 1)2 - 2*y*2 = 1,

или

2*y*2 = 4*t*(*t* + 1).

Следовательно, *y*2 кратно 2. Так как *y* - простое число, то *y* = 2. Отсюда *х=* $\sqrt{1+2^{3}}$=3.

b) Пусть *x* - четное число. Так как *x* - простое число, то *x* = 2. Следовательно, $у=\sqrt{\frac{3}{2}}N$ т. е. уравнение неразрешимо в простых числах.

Следовательно, уравнение имеет в классе простых чисел единственное реше­ние (3;2).

**Задача 3.** Доказать, что уравнение

|  |  |
| --- | --- |
| *x*2 - 2*y*2 = 1 |  |

имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

**Решение.** Нетрудно заметить, что (3,2) - одно из решений исходного уравне­ния. С другой стороны из тождества

(*x*2 + 2*y*2)2 - 2(2*xy*)2 = (*x*2 - 2*y*2)2

следует, что если (*x*, *y*) - решение данного уравнения, то пара (*x*2 + 2*y*2 , 2*xy*) также явля­ется его решением. Используя этот факт, рекуррентно определим бесконеч­ную последовательность (*xn , yn*) различных решений исходного уравнения:

*(x1 , y1) = (3,2)   и   xn+1 = xn2 + 2yn2,     yn+1 = 2xnyn,     n ∈****N****\*.*

**Задача 4.** Доказать, что уравнение

*x*(x + 1) = 4y(y+ 1)

неразрешимо в целых положительных числах.

**Решение.** Нетрудно заметить, что исходное уравнение равносильно уравнению

*x2* + *x* + 1 = (2*y* + 1)2.

Следовательно, *x*2 < (2*y* + 1)2 < (*x* + 1)2 или *x* < 2*y* + 1 < *x* + 1. Полученное противо­речие доказывает требуемое утверждение.

**Задача 5.** Решить в целых числах уравнение

*x + y = x2 - xy + y2.*

**Решение.** Положим t = x + y. Так как

*x2* – xy + y2  ≥ 0,25(*x +* y)2

то должно выполняться неравенство $t\geq \frac{1}{4}t^{2}$, *t ≥*  0,25 *t2 , откуда*

 *t* ∈ [0;4].

## Пример из ЕГЭ

Для того, чтобы показать пример диофантовых уравнение второго порядка в задании 19 ЕГЭ, снова обратимся к сборнику задач с решениями по математике профильного уровня 2017 года по Ю.В.Садовничему.

Итак, задача звучит следующим образом –«Найти все пары целых чисел (x,y), каждая из которых удовлетворяет уравнению

2x2 +5=3y2+5xy.

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

2x2+5=3y2+5xy ↔ 3y2+5xy-2x2 = 5 ↔ (3у-х)(у +2х)

↔ { 3y - x = 5; y + 2x = 1 } ↔ { 3y - x =-5; y + 2x =-1 }

 ↔ { 3y - x = 1; y + 2x = 5 } ↔ { 3y - x = -1; y + 2x = -5 }

Первые две системы не имеют решений в целых числах, третья и четвертая имеют решением пары (x,y) = (2,1) и (x,y) = (-2,-1) соответственно.

Ответ: {(2,1);(-2,-1)}»[[3]](#footnote-3).

# Часть 3. Историческая справка

Одним из продолжателей работ Диофанта можно считать Пьера Ферма. Около 1630 года перевод «Арифметики» попал в руки этому выдающемуся французскому математику. Ферма, вдохновленный бессмертным трудом Диофанта, разработал очень тонкие и глубинные теоретико-числовые исследования. В частности, идя по стопам Диофанта, Ферма доказал, что натуральное число *a*, тогда и только тогда, представимо в виде суммы двух квадратов (*x*2 + *y*2) с целыми *x* и *y* , когда все простые делители *a* , дающие при делении на 4 остаток 3 , входят в число *а* в четной степени. Он также нашел формулу для количества различных пар ( *x* ; *y* ) таких чисел. Работа Диофанта, дала повод Пьеру Ферма записать на полях перевода одно из самых достопримечательных замечаний в истории математики, которое мы называем Великой теоремой Ферма. Именно на полях этой книги, против того места, где идёт речь о решении уравнения вида *х*2 + *у*2 = *z*2, Ферма написал: «Между тем, совершенно невозможно разложить полный куб на сумму кубов, четвёртую степень – на сумму четвёртых степеней, вообще какую-нибудь степень – на сумму степеней с тем же показателем. Я нашёл поистине удивительное доказательство этого предположения, но здесь слишком мало места, чтобы его поместить». Это утверждение Ферма теперь формулируется как теорема в следующем виде: «Уравнение *xn* +y*n* = *zn* не может быть решено в натуральных числах относительно *x , y* и *z* при натуральных значениях показателя *n* , больших 2». Общеизвестно, что при *n* =2 такие числа существуют, например, 3, 4, 5 – числа, которые, если являются длинами сторон, образуют знаменитый треугольник Пифагора. Хотя формулировка носит очень простой характер, ее доказательство ученые искали несколько веков.

# Заключение

Работы по истории развития математики показывают, что именно благодаря методам Диофанта были разгаданы методы самого Архимеда. Развитие интеграционных методов Архимеда привело к созданию интегрального и дифференциального исчисления

Ньютоном и Лейбницем, то история методов Диофанта растягивается еще на несколько сотен лет. Попытки решить довольно простые в формулировках задачи, приводили к созданию и развитию теории алгебраических функций и алгебраической геометрии. Неразрешимость некоторых задач и идей Диофанта привело к великим работам Анри Пуанкаре и Андре Вейля. Раздел математики, занимающийся решением диофантовых уравнений, называется «диофантовым анализом», и он, в свою очередь, является частью интересного раздела современной математики – теории чисел. В самой теории чисел созданы специальные методы решения диофантовых (их ещё называют неопределёнными) уравнений. Задача решения уравнений третьей степени с двумя неизвестными до сих пор не нашла полного решения. Интерес к проблеме решения диофантовых уравнений остается и по сей день. На вопрос - имеет ли произвольное диофантово уравнение целочисленные решения, не найден и даже пока неизвестно, существует ли такой алгоритм.

Именно Диофант открыл нам мир арифметики и алгебры. Поэтому история диофантова анализа показалась мне особенно интересной. Я хотел бы продолжить работу над этой темой, расширить свои познания в решении неопределённых уравнений.

Есть универсальный алгоритм решения диофантовых уравнений первой степени, но для уравнений степени выше средней каждое уравнение нужно решать определенным методом.

В результате написания данной работы был сделан вывод о том, что область применения диофантовых уравнений довольно широка. Помимо того, что диофантовы уравнения являются одним из главных объектов рассмотрения науки теории чисел, они также широко используются в бытовых задачах, подразумевающих невозможность получения не целого ответа.

# Список литературы:

1.Журнал «Квант». Номер 12, 1978 года. Номер 4, 1985 года.

2.Виленкин, Н.Я. За страницами учебника математики: Пособие для учащихся 5-6 классов средней школы / Н.Я. Виленкин, И.Я. Депман. – М.: Просвещение, 1989. – 287 с.

3.Гильфорд, А.О. Решение уравнений в целых числах / А.О. Гильфорд. – М.: Наука, 1983. – 64 с.

4.Башмакова, И.Г. Диофант и диофантовы уравнения / И.Г. Башмакова. – М.: Наука, 1972. – 68 с.

5. Диофантовые уравнения https://sibmama.ru/diofantvy-uravneniya.htm // Ссылка действительна на 19.04.2018

6. Ю.В. Садовничий. Сборник заданий 19 Математики профильного уровня/Ю.В.Садовничий – М.:Издадельство «Экзамен», 2017. – 10-12 с.

# Приложение.

## Упражнения для тренировки.

1) Решите в целых числах.

|  |  |
| --- | --- |
| а) 8x + 12y = 32 | x = 1 + 3n, y = 2 - 2n, n http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| б) 7x + 5y = 29 | x = 2 + 5n, y = 3 – 7n, n http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| в) 4x + 7y = 75 | x = 3 + 7n, y = 9 – 4n, n http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| г) 9x – 2y = 1 | x = 1 – 2m, y = 4 + 9m, m http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| д) 9x – 11y = 36 | x = 4 + 11n, y = 9n, n http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| е) 7x – 4y = 29 | x = 3 + 4n, y = -2 + 7n, n http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| ж) 19x – 5y = 119 | x = 1 + 5p, y = -20 + 19p, p http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| з) 28x – 40y = 60 | x = 45 + 10t, y = 30 + 7t, t http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |

2) Найти целые неотрицательные решения уравнения:

|  |  |
| --- | --- |
| а) 8x + 65y = 81 | x = 2, y = 1 |
| б) 17x + 23y = 183 | x = 4, y = 5 |

3) Найти все пары целых чисел (x; y), удовлетворяющие следующим условиям

|  |  |
| --- | --- |
| а) x + y = xy | (0;0), (2;2) |
| б) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image952.gif | (1;2), (5;2), (-1;-1), (-5;-2) |

*Решение:*



*Число 3 можно разложить на множители:*

3 = 1•3 = 3·1 = (-1)·(-3) = (-3)·(-1)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| a) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image954.gif | б) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image955.gif | в) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image956.gif | г) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image957.gif |

Ответ: (-1; -2), (5; 2), (1;2), (-5; -2).

|  |  |
| --- | --- |
| в) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image958.gif | (11;12), (-11;-12), (-11;12), (11;-12) |
| г) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image959.gif | (24;23), (24;-23), (-24;-23), (-24;23) |
| д) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image960.gif | (48;0), (24;1), (24;-1) |
| е) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image961.gif | x = 3m; y = 2m, mhttp://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| ж) *y = 2x – 1* | x = m: y = 2m – 1, m http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| з) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image962.gif | x = 2m; y = m; x = 2m; y = -m, m http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| и)http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image963.gif | решений нет |

4) Решить уравнения в целых числах

|  |  |
| --- | --- |
| http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image964.gif | (-3;-2), (-1;1), (0;4), (2;-2), (3;1), (5;4) |
| (x - 3)(xy + 5) = 5 | (-2;3), (2;-5), (4;0) |
| (y + 1)(xy – 1)=3 | (0;-4), (1;-2), (1;2) |
| http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image965.gif | (-4;-1), (-2;1), (2;-1), (4;1) |
| http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image966.gif | (-11;-12), (-11;12), (11;-12), (11;12) |
| http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image967.gif | (-24;23), (-24;23), (24;-23), (24;23) |

5) Решить уравнения в целых числах.

|  |  |
| --- | --- |
| а) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image968.gif | (-1;0) |
| б)http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image969.gif | (5;0) |
| в) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image970.gif | (2;-1) |
| г) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image971.gif | (2; -1) |

1. [5] [↑](#footnote-ref-1)
2. [6] [↑](#footnote-ref-2)
3. [6] [↑](#footnote-ref-3)