**ВТОРАЯ ГЛАВА:**

**Диофантовы уравнения степени выше первой.**

**Решение диофантовых уравнений методом разложения на множители.**

**Задача 1.** Решить в целых числах уравнение

*x + y = xy*.

**Решение.** Запишем уравнение в виде

(*x* - 1)(*y* - 1) = 1.

Произведение двух целых чисел может равняться 1 только в том случае, когда оба они равны 1. Т. е. исходное уравнение равносильно совокупности

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| http://works.doklad.ru/images/na298o15cHQ/m7f4ff55e.png | http://works.doklad.ru/images/na298o15cHQ/m2c5fcfa4.png | *x* - 1 = 1, |
| *y* - 1 = 1, |
| http://works.doklad.ru/images/na298o15cHQ/m2c5fcfa4.png | *x* - 1 = -1, |
| *y* - 1 = -1, |

с решениями (0,0) и (2,2).

**Использование четности**

**Задача 2.** Решить в простых числах уравнение

|  |
| --- |
| *x*2 - 2*y*2 = 1. |

**Решение.** Рассмотрим два случая в зависимости от четности переменной *x*.

a) Пусть *x* - нечетное число. Подстановка *x* = 2*t* + 1 приводит исходное уравне­ние к виду

(2*t* + 1)2 - 2*y*2 = 1,

или

2*y*2 = 4*t*(*t* + 1).

Следовательно, *y*2 кратно 2. Так как *y* - простое число, то *y* = 2. Отсюда *х=* =3.

b) Пусть *x* - четное число. Так как *x* - простое число, то *x* = 2. Следовательно,  т. е. уравнение неразрешимо в простых числах.

Следовательно, уравнение имеет в классе простых чисел единственное реше­ние (3;2).

**Задача 3.** Доказать, что уравнение

|  |  |
| --- | --- |
| *x*2 - 2*y*2 = 1 |  |

имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

**Решение.** Нетрудно заметить, что (3,2) - одно из решений исходного уравне­ния. С другой стороны из тождества

(*x*2 + 2*y*2)2 - 2(2*xy*)2 = (*x*2 - 2*y*2)2

следует, что если (*x*, *y*) - решение данного уравнения, то пара (*x*2 + 2*y*2 , 2*xy*) также явля­ется его решением. Используя этот факт, рекуррентно определим бесконеч­ную последовательность (*xn , yn*) различных решений исходного уравнения:

*(x1 , y1) = (3,2)   и   xn+1 = xn2 + 2yn2,     yn+1 = 2xnyn,     n ∈****N****\*.*

**Задача 4.** Доказать, что уравнение

*x*(x + 1) = 4y(y+ 1)

неразрешимо в целых положительных числах.

**Решение.** Нетрудно заметить, что исходное уравнение равносильно уравнению

*x2* + *x* + 1 = (2*y* + 1)2.

Следовательно, *x*2 < (2*y* + 1)2 < (*x* + 1)2 или *x* < 2*y* + 1 < *x* + 1. Полученное противо­речие доказывает требуемое утверждение.

**Задача 5.** Решить в целых числах уравнение

*x + y = x2 - xy + y2.*

**Решение.** Положим t = x + y. Так как

*x2* – xy + y2  ≥ 0,25(*x +* y)2

то должно выполняться неравенство *t ≥*  0,25 *t2 , откуда t* ∈ [0;4].

**Приложение.**

**Упражнения для тренировки.**

1) Решите в целых числах.

|  |  |
| --- | --- |
| а) 8x + 12y = 32 | x = 1 + 3n, y = 2 - 2n, n http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| б) 7x + 5y = 29 | x = 2 + 5n, y = 3 – 7n, n http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| в) 4x + 7y = 75 | x = 3 + 7n, y = 9 – 4n, n http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| г) 9x – 2y = 1 | x = 1 – 2m, y = 4 + 9m, m http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| д) 9x – 11y = 36 | x = 4 + 11n, y = 9n, n http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| е) 7x – 4y = 29 | x = 3 + 4n, y = -2 + 7n, n http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| ж) 19x – 5y = 119 | x = 1 + 5p, y = -20 + 19p, p http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| з) 28x – 40y = 60 | x = 45 + 10t, y = 30 + 7t, t http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |

2) Найти целые неотрицательные решения уравнения:

|  |  |
| --- | --- |
| а) 8x + 65y = 81 | x = 2, y = 1 |
| б) 17x + 23y = 183 | x = 4, y = 5 |

3) Найти все пары целых чисел (x; y), удовлетворяющие следующим условиям

|  |  |
| --- | --- |
| а) x + y = xy | (0;0), (2;2) |
| б) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image952.gif | (1;2), (5;2), (-1;-1), (-5;-2) |

*Решение:*



*Число 3 можно разложить на множители:*

3 = 1•3 = 3·1 = (-1)·(-3) = (-3)·(-1)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| a) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image954.gif | б) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image955.gif | в) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image956.gif | г) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image957.gif |

Ответ: (-1; -2), (5; 2), (1;2), (-5; -2).

|  |  |
| --- | --- |
| в) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image958.gif | (11;12), (-11;-12), (-11;12), (11;-12) |
| г) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image959.gif | (24;23), (24;-23), (-24;-23), (-24;23) |
| д) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image960.gif | (48;0), (24;1), (24;-1) |
| е) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image961.gif | x = 3m; y = 2m, mhttp://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| ж) *y = 2x – 1* | x = m: y = 2m – 1, m http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| з) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image962.gif | x = 2m; y = m; x = 2m; y = -m, m http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| и)http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image963.gif | решений нет |

4) Решить уравнения в целых числах

|  |  |
| --- | --- |
| http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image964.gif | (-3;-2), (-1;1), (0;4), (2;-2), (3;1), (5;4) |
| (x - 3)(xy + 5) = 5 | (-2;3), (2;-5), (4;0) |
| (y + 1)(xy – 1)=3 | (0;-4), (1;-2), (1;2) |
| http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image965.gif | (-4;-1), (-2;1), (2;-1), (4;1) |
| http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image966.gif | (-11;-12), (-11;12), (11;-12), (11;12) |
| http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image967.gif | (-24;23), (-24;23), (24;-23), (24;23) |

5) Решить уравнения в целых числах.

|  |  |
| --- | --- |
| а) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image968.gif | (-1;0) |
| б)http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image969.gif | (5;0) |
| в) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image970.gif | (2;-1) |
| г) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image971.gif | (2; -1) |