Департамент образования города Москвы

Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение города Москвы «Школа №1505 Преображенская»

«Московская городская педагогическая гимназия-лаборатория»

**РЕФЕРАТ**

**на тему**

**Линейная алгебра в экономике**

Выполнил (а):

Зиняков Антон Вячеславович

Руководитель:

Кириллов Дмитрий Анатольевич

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Рецензент:

Дегтярева Татьяна Владимировна

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Москва

2017/2018 уч.г.

**Оглавление**

[Введение 3](#_Toc420856888)

[1. Матрицы 5](#_Toc420856889)

[1.1 Типы матриц 6](#_Toc420856891)  
1.2 Действия с матрицами 7

[2 Система линейных уравнений 9](#_Toc420856892)

[3 Примеры решенных задач 11](#_Toc420856892)

[3.1 Задачи с матрицами 11](#_Toc420856893)

[3.2 Задачи с СЛУ 16](#_Toc420856893)

[Заключение](#_Toc420856895) 20

[Список литературы 22](#_Toc420856896)

**Введение**

Кто-нибудь из вас когда-нибудь задумывался что такое экономика? А самое главное, как решаются различные задачи в экономике, какие используются расчеты и методы решений. Откуда их берут для анализа экономических проблем и самое главное для их решения и поиска ответов на поставленные задачи и цели. В своем реферате я расскажу вам о вариантах используемых расчетов и о способах решениях задач в отдельных сферах экономики, а также о том, какие вычисления из линейной алгебры используются при решении экономических задач. А именно:

1. Как используются матрицы в решении экономических задач;
2. Как используются системы линейных уравнений(СЛУ) для этих же целей.

Целью моего реферата также является описание истории возникновения математических элементов, таких как матрицы и СЛУ, а на основе рассмотренных вариантов решений задач, описать каким способом они используются в различных сегментах экономики на сегодняшний день.

Основными моими задачами являются:

1. Поиск источников информации об истории происхождения математических элементов, таких как матрицы и СЛУ, сферах и способах их применений.
2. Анализ каждого источника на наличие требуемой информации.
3. Отбор в источниках информации актуальных сведений на требуемую тему.
4. Показать варианты осуществления расчетов с использованием элементов линейной алгебры на примере конкретных задач.
5. Запись всей найденной информации и решений задач единым текстом.

**Глава 1. Матрицы**

Перед тем, как рассмотреть примеры решения и записи задач с помощью матриц, нужно разобраться, что это такое.

Впервые матрицы упоминались ещё в древнем Китае, называясь тогда «волшебным квадратом». Основным применением матриц было решение линейных уравнений. Так же, волшебные квадраты были известны чуть позднее у арабских математиков, примерно тогда появился принцип сложения матриц. После развития теории определителей в конце 17-го века, Габриэль Крамер начал разрабатывать свою теорию в 18-ом столетии и опубликовал «правило Крамера» в 1751 году. Примерно в этом же промежутке времени появился «метод Гаусса». Теория матриц начала своё существование в середине XIX века в работах Уильяма Гамильтона и Артура Кэли. Фундаментальные результаты в теории матриц принадлежат Вейерштрассу, Жордану, Фробениусу. Термин «матрица» ввел Джеймс Сильвестр в 1850 г. Понятие матрицы и основанный на нем раздел математики – матричная алгебра – имеют чрезвычайно важное значение для экономистов. Объясняется это тем, что значительная часть математических моделей экономических объектов и процессов записывается в достаточно простой, а главное – компактной матричной форме[[1]](#footnote-1). Итак, матрица – это прямоугольная таблица, представляющая собой совокупность строк и столбцов. Размерностью матрицы называется величина m×n, где m-число строк, n-число столбцов.

**1.1. Типы матриц.**

Существует несколько типов матриц:

1. Квадратная матрица.

Это матрица, в которой число строк равно числу столбцов.

2. Нулевая матрица.

Это матрица, все элементы которой равны нулю.

3. Матрица-строка.

Это матрица, состоящая из одной строки.

4. Матрица-столбец.

Это матрица, состоящая из одного столбика.

5. Диагональная матрица.

Это матрица, все элементы которой, лежащие вне главной диагонали, равны нулю.

6. Единичная матрица.

Это диагональная матрица, диагональные элементы которой равны 1.

**1.2. Действия с матрицами.**

**Действие первое**. Умножение матрицы на число.

=

Для того, чтобы умножить матрицу на число надо всего лишь умножить каждый элемент матрицы на это число.

**Действие второе.** Транспонирование матрицы.

; D=

Для того, чтобы транспонировать матрицу, нужно ее строки записать в столбцы транспонированной матрицы.

**Действие третье.** Сумма (разница) матриц.

**Для того, чтобы сложить (вычесть) матрицы, необходимо сложить (вычесть) их соответствующие элементы. Но** не все матрицы можно складывать (вычитать). Для выполнения сложения (вычитания) матриц, необходимо, чтобы они были одинаковыми по размеру.

**Действие четвертое.** Умножение матриц.

Для того, чтобы умножить одну матрицу на другую нужно, чтобы количество столбцов первой матрицы равнялось количеству строк во второй.

Для того, чтобы объяснить, как умножать одну матрицу на другую, проще привести общую формулу:

В итоге, можно сказать, что матрица, с одной стороны, является математическим элементом, берущим начало еще с древнего Китая, существует уже долгое время, активно развивается, а с другой стороны, матрицы используются до сих пор в математике, а также для записи и решения задач в различных сферах (примеры задач приведены в главе 3), благодаря простоте записи и действий, проводимых с матрицами, о которых я рассказал ранее.

**Глава 2. Система линейных уравнений**

Для начала надо разобраться что же такое система линейных уравнений (СЛУ) и какова её история.

Идею общего метода решения систем линейных уравнений высказал Лейбниц в 1693 году. Она была реализована швейцарским математиком Крамером в 1752 году. Он сформулировал и обосновал правило, носящее теперь его имя, которое позволяет решать системы n линейных уравнений с n неизвестными и буквенными коэффициентами. По правилу Крамера каждая неизвестная равна отношению двух определителей. Крамер, фактически, заложил основы теории определителей, хотя и не предложил для них удобного обозначения. В 1772 году Вандермонд опубликовал обширное исследование определителей, один из которых носит теперь его имя. Систематическое изложение этой теории принадлежит Бине и Коши. Их труды по теории определителей относятся к периоду 1812–1815гг[[2]](#footnote-2).

Система линейных уравнений - система уравнений, в которой каждое уравнение является линейным, имеет первую степень. Система в задачах чаще всего служит краткой записью задачи условия, что помогает быстрее разобраться в условиях задачи и её решении.

Система m линейных уравнений с n переменными имеет вид:

a11х1+а12х2+…+а1jxj+…+а1nxn=b1;

a21х1+а22х2+…+а2jxj+…+а2nxn=b2;

………………………………..

ai1х1+аi2х2+…+аijxj+…+аinxn=bi;

…………………………………

am1х1+аm2х2+…+аmjxj+…+аmnxn=bm;

где aij, bi (i=1,2, … ,m; j=1,2, … ,n) – произвольные числа, называемые коэффициентами при переменных и свободными членами уравнений.

Решением системы уравнений называется такая совокупность n чисел (x1=k1, x2=k2, … ,xn=kn), при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

В итоге, можно сказать, что система линейных уравнений является наряду с матрицами таким же эффективным математическим инструментом линейной алгебры, широко применяемым для решения разнообразных задач, в том числе и в экономике (примеры задач приведены в главе 3), в связи с относительной простотой решения системы линейных уравнений.

**Глава 3. Примеры записей и решения задач с помощью матриц и системы линейных уравнений (СЛУ)**

**3.1. Задачи с матрицами**

С помощью матриц значительная часть математических моделей экономических объектов и процессов записывается в достаточно простой, а главное - компактной матричной форме.

С помощью матриц удобно записывать некоторые экономические зависимости. Например, ниже приведена таблица распределения ресурсов по отдельным отраслям экономики:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Ресурсы | Отрасли экономики | | |
| Промышленность | Сельское хозяйство | Торговля |
| Трудовые ресурсы | 4,8 | 6,7 | 7,1 |
| Водные ресурсы | 3,1 | 2,5 | 5,8 |
| Электроэнергия | 5,6 | 4,3 | 3,4 |

Указанная в таблице информация может быть записана в компактной форме в виде матрицы A распределения ресурсов по отраслям:

В данной записи, например, матричный элемент = 3,1 показывает, сколько водных ресурсов употребляет промышленность, а элемент = 5,8 - сколько водных ресурсов потребляет торговля.

Задача 1.

Предприятие выпускает три вида продукции С1, С2, С3 и на производство данной продукции использует два вида сырья К1, К2. Зная план выпуска продукции, а также стоимость каждого вида сырья необходимо определить стоимость затрат на сырье.

Решение:

Сначала представим указанную задачу в виде обычной таблицы как в примере приведенном выше.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Сырье К1 | Сырье К2 |
| Продукция С1 | 4 | 3 |
| Продукция С2 | 2 | 6 |
| Продукция С3 | 1 | 5 |

Указанная в таблице информация может быть записана в компактной форме в виде матрицы A распределения сырья при производстве каждого из видов продукции:

Где каждый элемент аij показывает, сколько сырья j-того типа расходуется на производство продукции i-того типа. Стоимость каждого типа сырья задана матрицей-столбцом С:

А план выпуска продукции задан матрицей-строкой В:

В = (90 130 50)

Рассмотрев задачу, получаем, что затраты 1-го сырья составляют К1 = 4 × 90 + 2 × 130 + 1 × 50 = 670 (единиц), а затраты второго сырья составляют К2 = 3 × 90 + 6 × 130 + 5 × 50 = 1300 (единиц).

Таким образом матрица-строка затрат сырья К может быть записана как произведение:

К = В × А = (90 130 50) = (670 1300)

Следовательно, общая стоимость сырья Р может быть записана в виде матрицы: Р = К × С = (ВА) × С = 670 × 60 + 1300 × 40 = 92200.

Задача 2.

Предприятие производит продукцию трех видов С1, С2, С3 и использует сырье двух видов К1, К2. Нормы затрат сырья на единицу продукции каждого вида заданы матрицей:

А -

Стоимость едины сырья каждого типа задана матрицей:

С –

Каковы общие затраты предприятия на производство 100 единиц продукции первого вида, 200 единиц продукции второго вида и 150 единиц продукции третьего вида? То есть план выпуска продукции задан матрицей-строкой В - (100 200 150).

Решение:

Таким образом матрица-строка затрат сырья К может быть записана как произведение:

К = В × А = (100 200 150) = (850 1300)

Затраты 1-го сырья составляют К1 = 2 × 100 + 1 × 200 + 3 × 150 = 850 (единиц), а затраты второго сырья составляют К2 = 1 × 100 + 3 × 200 + 4 × 150 = 1300 (единиц).

Следовательно, общие затраты предприятия на производство 100 единиц продукции первого вида, 200 единиц продукции второго вида и 150 единиц продукции третьего вида составляют Р = К × С = (ВА) × С = 850 × 10 + 1300 × 15 = 28000.

Задача 3.

Предприятие производит четыре типа продукции и реализует её в трех регионах (j): Владимир, Брянск и Калуга. Объемы выпуска продукции по типам заданы матрицей А – .

Цена реализации единицы i-го типа продукции в j-ом регионе задана матрицей В.

В -

Определить какой из регионов наиболее выгоден для реализации товара.

Решение:

Найдем матрицу выручки С по регионам. Выручка определяется умножением цены реализации на объем выпуска для каждого типа продукции, то есть в нашем случае матрицей С = A × B, где С = выручка предприятия в j-м регионе.

C = × = (10×2 + 40×4 + 30×1 + 20×1; 10×1 + 40×2 + 30×3 + 20×4; 10×2 + 40×3 + 30×1 + 20×4) = (230; 260; 250).

Как видно, в матрице выручки максимальным по величине является элемент С12 = 260. Таким образом, наиболее выгоден для реализации товара второй регион (город Брянск).

Матричные методы находят широкое применение в экономической практике: сокращение документооборота, статистические расчеты, организация внутри производственного хозрасчета и для экономического анализа. Матричным методом пользуются при сравнении, при оценке структурных подразделений и работы смой организации в целом. Решая экономические задачи при помощи матричных методов мы смогли решать основные задачи экономического типа на всех организация и предприятиях. В примерах задач, приведенных выше, рассказано об эффективном методе (с помощью матриц) определения затрат на производство того или иного вида продукции (задача 1 и задача 2), а также о простом методе определения эффективности продаж продукции в регионах (задача 3).

3.2. **Задачи с использованием системы линейных уравнений (СЛУ)**

Задача 4.

Из определенного листового материала необходимо выкроить 360 заготовок типа А, 300 заготовок типа Б и 675 заготовок типа В. При этом можно применять 3 способа раскроя. Количество заготовок, получаемых из каждого листа при каждом способе раскроя, указано в таблице:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Тип заготовки | Способ раскроя | | |
| 1 | 2 | 3 |
| А | 3 | 2 | 1 |
| Б | 1 | 6 | 2 |
| В | 4 | 1 | 5 |

Решение:

Обозначим через x, y, z количество листов материала, раскраиваемых соответственно первым, вторым и третьим способами. Тогда при первом способе раскроя x листов будет получено 3х заготовок типа А, при втором - 2y, при третьем - z. Для полного выполнения задания по заготовкам типа А должно выполняться равенство:

3x+2y+z=360.

Так же получаем уравнения x+6y+2z=300 и 4x+y+5z=675. А затем и систему из трех линейных уравнений которая выражает в математической форме условия выполнения всего задания по заготовкам А, Б и В:

Из первого уравнения получаем, что

Подставляя указанное выражение, во второе и третье уравнение в системе получаем систему из двух линейных уравнений:

Раскрываем скобки и упрощаем выражение:

, далее

, далее из первого уравнения получаем, что , подставляя указанное выражение во второе уравнение системы получаем, что:

, ,

Задача 5.

Обувная фабрика специализируется по выпуску изделий трех видов: сапог, кроссовок и ботинок. При этом используется сырье трех типов: Нормы расхода каждого из них на одну пару обуви, объем расхода сырья на один день заданы таблицей:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Виды сырья | Нормы расхода сырья на одну пару | | | Расход сырья на один день |
| Сапоги | Кроссовки | Ботинки |
|  | 5 | 3 | 4 | 2700 |
|  | 2 | 1 | 1 | 900 |
|  | 3 | 2 | 2 | 1600 |

Решение:

Обозначим через x, y, z – ежедневный объем выпуска сапог, кроссовок и ботинок соответственно. Исходя из изложенного, составим систему уравнений:

Из второго уравнения получаем, что

Подставляя указанное выражение, во второе и третье уравнение в системе получаем систему из двух линейных уравнений:

Раскрываем скобки и упрощаем выражение:

, ,

Задача 6.

Рассмотрим пример, показывающий, как вычислить наиболее экономичное расстояние для перевозок. Издержки перевозки двумя транспортными средствами выражаются функциями y=20x+100 и y=25x+70, где x —это дальность перевозки в сотнях километров, а y -транспортные расходы в денежных единицах. Определить, начиная с какого расстояния более экономичным становится первое транспортное средство.

Решение:

Для нахождения требуемого расстояния приравниваем транспортные расходы:

Итак, при перевозке грузов на расстояние в 600 километров x = 6 сотен километров транспортные расходы совпадают и составляют   
y = 20 ×·6 + 100 = 220 денежных единиц. Поэтому, на расстоянии до 600 километров более экономичным является второй вид транспорта, а начиная с 600-го километра, более экономичным становится первый вид транспорта.

Модель «затраты-выпуск» (задача 5 и задача 6) представляет собой метод систематического, количественного отражения экономических связей внутри предприятия при производстве продукции. Эта модель может использоваться и для отражения экономических связей между секторами хозяйственной системы. Например, между секторами экономики в нашей стране. Её используют для анализа как мировой, так и национальной экономики, а также для анализа хозяйства города или отдельного предприятия.

Таким образом простая система алгебраических уравнений служит основой как для экономики предприятия (задача 6, определение эффективности транспортных расходов), так и для государственной экономики целой страны.

**Заключение**

В завершении всего выше сказанного, можно сделать вывод, что все те математические элементы, которые приведены в этой работе, были открыты уже давно и используются в точных науках с момента открытия и до сих пор, таких как экономика, математика и т.д., как для решения разнообразных задач, так и для других целей. Матричные методы и СЛУ в настоящее время широко применяются для описания и решения задач в технической области: электроэнергетике, биологии, химии, нефтегазовой промышленности, банковской сфере и т.д., а также в гуманитарной плоскости: такой как социология и маркетинг.

В экономике же каждый этот элемент является частью оформления задачи, связанной с денежными расчетами, производством некоторых товаров, оказанием некоторых услуг и т.д. При использовании этих двух математических элементов, можно решать разнонаправленные (из различных сфер) экономические задачи.

В примерах задач, приведенных в главе 3, рассказано об эффективном методе (с помощью матриц и СЛУ) определения затрат на производство того или иного вида продукции (задача 1, задача 2, задача 4, задача 5), о простом методе определения эффективности продаж продукции в регионах (задача 3), а также методе оптимизации логистических расходов (задача 6). Все эти методы широко используется в экономике для оптимизации производства с точки зрения ассортимента, расхода сырья и материалов, а также всех иных затрат, сопутствующих производству. Матричные методы можно также использовать для моделирования экономики целых отраслей народного хозяйства, экономики субъектов Российской Федерации. Матрицы данного типа носят название межотраслевого баланса и находят широкое применение в планировании и статистике.

Как показано на примере решения задач, простая система алгебраических уравнений также может служить основой как для экономики предприятия, так и для государственной экономики целой страны.

В итоге, можно сказать, что благодаря всего лишь этим двум математическим элементам (матрица и система линейных уравнений) можно записать и решить разнообразные экономические задачи. Эти способы одновременно понятны и совсем не сложны для понимания человека, который изучает экономику.

Также отмечу, что в работе описаны наиболее популярные способы применения линейной алгебры в экономике. В целом же, линейная алгебра является наиболее используемым и простым в отношении других применяемых дисциплин способом решения экономических задач.

Перспективы ее обусловлены понятностью, прозрачностью решения и однозначностью полученного результата. Полученные результаты можно объяснить не только профессиональным экономистам, но и специалистам из других сфер. Более того, задачи, которые решаются в рамках линейной алгебры в экономике, можно описать вычисления не только в экономической сфере, а также в сфере логистики, торговли, менеджмента и прочих смежных с экономикой отраслях.

**Список литературы**

Дьякова, Л.А. Матрица, ее история и применение [Электронный ресурс] / Дьякова Л.А. - Режим доступа: <http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D0%B0%D0%B2%D1%82%D0%BE%D1%80%D1%8B/267-062-654>

Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов: учебное пособие/ Н.Ш. Кремер - 3-е изд.- М.: 2007. — 479 с.

Ахмедханова, А.И. Применение матриц в экономике [Электронный ресурс] / А.И. Ахмедханова, В.А. Кожемякин, И.И. Мамаев // Международный студенческий научный вестник. – 2015. - №3 (часть 4) – Режим доступа: <https://www.eduherald.ru/ru/article/view?id=14118>

История системы линейных уравнений [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.academiaxxi.ru/Collections/La_Ag/Electr_book/La/07/i.htm>

Цысь, Ю.В. Элементы линейной алгебры и их применения при решении экономических задач [Электронный ресурс] / Ю.В. Цысь, А.Ф. Долгополова // Современные наукоемкие технологии. – 2013. – № 6 – С. 91-93 – Режим доступа: <https://www.top-technologies.ru/ru/article/view?id=31998>

1. Матрица, ее история и применение // URL: http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D0%B0%D0%B2%D1%82%D0%BE%D1%80%D1%8B/267-062-654 [↑](#footnote-ref-1)
2. История системы линейных уравнений // URL: http://www.academiaxxi.ru/Collections/La\_Ag/Electr\_book/La/07/i.htm [↑](#footnote-ref-2)