**Глава 3. Примеры записей и решения задач с помощью матриц и системы линейных уравнений (СЛУ)**

**3.1. Задачи с матрицами**

С помощью матриц значительная часть математических моделей экономических объектов и процессов записывается в достаточно простой, а главное - компактной матричной форме.

С помощью матриц удобно записывать некоторые экономические зависимости. Например, ниже приведена таблица распределения ресурсов по отдельным отраслям экономики:

|  |  |
| --- | --- |
| Ресурсы | Отрасли экономики |
| Промышленность | Сельское хозяйство | Торговля |
| Трудовые ресурсы | 4,8 | 6,7 | 7,1 |
| Водные ресурсы | 3,1 | 2,5 | 5,8 |
| Электроэнергия | 5,6 | 4,3 | 3,4 |

Указанная в таблице информация может быть записана в компактной форме в виде матрицы A распределения ресурсов по отраслям:

$А- \left(\begin{matrix}4,8&6,7&7,1\\3,1&2,5&5,8\\5,6&4,3&3,4\end{matrix}\right)$

В данной записи, например, матричный элемент $а\_{21}$ = 3,1 показывает, сколько водных ресурсов употребляет промышленность, а элемент $а\_{32}$ = 5,8 - сколько водных ресурсов потребляет торговля.

Задача 1.

Предприятие выпускает три вида продукции С1, С2, С3 и на производство данной продукции использует два вида сырья К1, К2. Зная план выпуска продукции, а также стоимость каждого вида сырья необходимо определить стоимость затрат на сырье.

Решение:

Сначала представим указанную задачу в виде обычной таблицы как в примере приведенном выше.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Сырье К1 | Сырье К2 |
| Продукция С1  | 4 | 3 |
| Продукция С2  | 2 | 6 |
| Продукция С3 | 1 | 5 |

Указанная в таблице информация может быть записана в компактной форме в виде матрицы A распределения сырья при производстве каждого из видов продукции:

$А-$ $\left(\begin{matrix}4&3\\2&6\\1&5\end{matrix}\right)$

Где каждый элемент аij показывает, сколько сырья j-того типа расходуется на производство продукции i-того типа. Стоимость каждого типа сырья задана матрицей-столбцом С:

$С-$ $\left(\begin{matrix}60\\40\end{matrix}\right)$

А план выпуска продукции задан матрицей-строкой В:

В = (90 130 50)

Рассмотрев задачу, получаем, что затраты 1-го сырья составляют К1 = 4 × 90 + 2 × 130 + 1 × 50 = 670 (единиц), а затраты второго сырья составляют К2 = 3 × 90 + 6 × 130 + 5 × 50 = 1300 (единиц).

Таким образом матрица-строка затрат сырья К может быть записана как произведение:

К = В × А = (90 130 50)$ \left(\begin{matrix}4&3\\2&6\\1&5\end{matrix}\right)$$ \left(\begin{matrix}4&3\\2&6\\1&5\end{matrix}\right)$ = (670 1300)

Следовательно, общая стоимость сырья Р может быть записана в виде матрицы: Р = К × С = (ВА) × С = 670 × 60 + 1300 × 40 = 92200.

Задача 2.

Предприятие производит продукцию трех видов С1, С2, С3 и использует сырье двух видов К1, К2. Нормы затрат сырья на единицу продукции каждого вида заданы матрицей:

А - $\left(\begin{matrix}2&1&3\\1&3&4\end{matrix}\right)$

Стоимость едины сырья каждого типа задана матрицей:

С – $\left(\begin{matrix}10&15\end{matrix}\right)$$\left(\begin{matrix}10&15\end{matrix}\right)$

Каковы общие затраты предприятия на производство 100 единиц продукции первого вида, 200 единиц продукции второго вида и 150 единиц продукции третьего вида? То есть план выпуска продукции задан матрицей-строкой В - (100 200 150).

Решение:

Таким образом матрица-строка затрат сырья К может быть записана как произведение:

К = В × А = (100 200 150)$ \left(\begin{matrix}2&1\\1&3\\3&4\end{matrix}\right)$$ \left(\begin{matrix}2&1\\1&3\\3&4\end{matrix}\right)$ = (850 1300)

Затраты 1-го сырья составляют К1 = 2 × 100 + 1 × 200 + 3 × 150 = 850 (единиц), а затраты второго сырья составляют К2 = 1 × 100 + 3 × 200 + 4 × 150 = 1300 (единиц).

Следовательно, общие затраты предприятия на производство 100 единиц продукции первого вида, 200 единиц продукции второго вида и 150 единиц продукции третьего вида составляют Р = К × С = (ВА) × С = 850 × 10 + 1300 × 15 = 28000.

Задача 3.

Предприятие производит четыре типа продукции и реализует её в трех регионах (j): Владимир, Брянск и Калуга. Объемы выпуска продукции по типам заданы матрицей А – $\left(\begin{matrix}10&15\end{matrix}\right)$$\left(\begin{matrix}10&40&30&20\end{matrix} \right)$.

Цена реализации единицы i-го типа продукции в j-ом регионе задана матрицей В.

В - $ \left(\begin{matrix}2&1&2\\4&2&3\\1&3&1\\1&4&4\end{matrix}\right)$

Определить какой из регионов наиболее выгоден для реализации товара.

Решение:

Найдем матрицу выручки С по регионам. Выручка определяется умножением цены реализации на объем выпуска для каждого типа продукции, то есть в нашем случае матрицей С = A × B, где С = выручка предприятия в j-м регионе.

C = $\left(\begin{matrix}10&40&30&20\end{matrix} \right)$ × $ \left(\begin{matrix}2&1&2\\4&2&3\\1&3&1\\1&4&4\end{matrix}\right) $= (10×2 + 40×4 + 30×1 + 20×1; 10×1 + 40×2 + 30×3 + 20×4; 10×2 + 40×3 + 30×1 + 20×4) = (230; 260; 250).

Как видно, в матрице выручки максимальным по величине является элемент С12 = 260. Таким образом, наиболее выгоден для реализации товара второй регион (город Брянск).

Матричные методы находят широкое применение в экономической практике: сокращение документооборота, статистические расчеты, организация внутри производственного хозрасчета и для экономического анализа. Матричным методом пользуются при сравнении, при оценке структурных подразделений и работы смой организации в целом. Решая экономические задачи при помощи матричных методов мы смогли решать основные задачи экономического типа на всех организация и предприятиях. В примерах задач, приведенных выше, рассказано об эффективном методе (с помощью матриц) определения затрат на производство того или иного вида продукции (задача 1 и задача 2), а также о простом методе определения эффективности продаж продукции в регионах (задача 3).

3.2. **Задачи с использованием системы линейных уравнений (СЛУ)**

Задача 4.

Из определенного листового материала необходимо выкроить 360 заготовок типа А, 300 заготовок типа Б и 675 заготовок типа В. При этом можно применять 3 способа раскроя. Количество заготовок, получаемых из каждого листа при каждом способе раскроя, указано в таблице:

|  |  |
| --- | --- |
| Тип заготовки | Способ раскроя |
| 1 | 2 | 3 |
| А | 3 | 2 | 1 |
| Б | 1 | 6 | 2 |
| В | 4 | 1 | 5 |

Решение:

Обозначим через x, y, z количество листов материала, раскраиваемых соответственно первым, вторым и третьим способами. Тогда при первом способе раскроя x листов будет получено 3х заготовок типа А, при втором - 2y, при третьем - z. Для полного выполнения задания по заготовкам типа А должно выполняться равенство:

3x+2y+z=360.

Так же получаем уравнения x+6y+2z=300 и 4x+y+5z=675. А затем и систему из трех линейных уравнений которая выражает в математической форме условия выполнения всего задания по заготовкам А, Б и В:

$\left\{\begin{array}{c}x+6y+2z=300\\3x+2y+z=360\\4x+y+5z=675\end{array}\right.$

Из первого уравнения получаем, что $x=300-6y-2z$

Подставляя указанное выражение, во второе и третье уравнение в системе получаем систему из двух линейных уравнений:

$\left\{\begin{array}{c}3\*\left(300-6y-2z\right)+2y+z=360\\4\*\left(300-6y-2z\right)+y+5z=675\end{array}\right.$

Раскрываем скобки и упрощаем выражение:

$\left\{\begin{array}{c}900-18y-6z+2y+z=360\\1200-24y-8z+y+5z=675\end{array}\right.$ , далее

$\left\{\begin{array}{c}-16y-5z=-540\\-23y-3z=-525\end{array}\right.$ , далее из первого уравнения получаем, что $z=108-3,2y$, подставляя указанное выражение во второе уравнение системы получаем, что:

$-23y-3\*\left(108-3,2y\right)=-525$

$-13,4y=-201$

$y=15$, $z=108-3,2\*15=60$, $x=300-6\*15-2\*60=90$

Задача 5.

Обувная фабрика специализируется по выпуску изделий трех видов: сапог, кроссовок и ботинок. При этом используется сырье трех типов: $S\_{1},S\_{2},S\_{3}. $Нормы расхода каждого из них на одну пару обуви, объем расхода сырья на один день заданы таблицей:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Виды сырья | Нормы расхода сырья на одну пару | Расход сырья на один день |
| Сапоги | Кроссовки | Ботинки |
| $$S\_{1}$$ | 5 | 3 | 4 | 2700 |
| $$S\_{2}$$ | 2 | 1 | 1 | 900 |
| $$S\_{3}$$ | 3 | 2 | 2 | 1600 |

Решение:

Обозначим через x, y, z – ежедневный объем выпуска сапог, кроссовок и ботинок соответственно. Исходя из изложенного, составим систему уравнений:

$\left\{\begin{array}{c}5x+3y+4z=2700\\2x+y+z=900\\3x+2y+2z=1600\end{array}\right.$

Из второго уравнения получаем, что $y=900-2x-z$

Подставляя указанное выражение, во второе и третье уравнение в системе получаем систему из двух линейных уравнений:

$\left\{\begin{array}{c}5x+3\*\left(900-2x-z\right)+4z=2700\\3x+2\*\left(900-2x-z\right)+2z=1600\end{array}\right.$

Раскрываем скобки и упрощаем выражение:

$\left\{\begin{array}{c}-x+z=0\\-x=-200\end{array}\right.$$\left\{\begin{array}{c}-x+z=0\\-x=-200\end{array}\right.$

$x=200$, $z=200$, $y=900-2\*200-200=300$

Задача 6.

Рассмотрим пример, показывающий, как вычислить наиболее экономичное расстояние для перевозок. Издержки перевозки двумя транспортными средствами выражаются функциями y=20x+100 и y=25x+70, где x —это дальность перевозки в сотнях километров, а y -транспортные расходы в денежных единицах. Определить, начиная с какого расстояния более экономичным становится первое транспортное средство.

Решение:

$\left\{\begin{array}{c}y=20x+100\\y=25x+70\end{array}\right.$

Для нахождения требуемого расстояния приравниваем транспортные расходы:

$20x+100=25x+70$

$5x=30$

$x=6$

Итак, при перевозке грузов на расстояние в 600 километров x = 6 сотен километров транспортные расходы совпадают и составляют
y = 20 ×·6 + 100 = 220 денежных единиц. Поэтому, на расстоянии до 600 километров более экономичным является второй вид транспорта, а начиная с 600-го километра, более экономичным становится первый вид транспорта.

Модель «затраты-выпуск» (задача 5 и задача 6) представляет собой метод систематического, количественного отражения экономических связей внутри предприятия при производстве продукции. Эта модель может использоваться и для отражения экономических связей между секторами хозяйственной системы. Например, между секторами экономики в нашей стране. Её используют для анализа как мировой, так и национальной экономики, а также для анализа хозяйства города или отдельного предприятия.

Таким образом простая система алгебраических уравнений служит основой как для экономики предприятия (задача 6, определение эффективности транспортных расходов), так и для государственной экономики целой страны.