# Глава 2. Динамика вращательного движения

## Параграф 1. Законы Ньютона

В основе динамики любого механического движения лежат три закона Ньютона:

1. Существует такая система отсчета, в которой любое тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, если на него НЕ действуют силы, или их действие скомпенсировано. Такая система отсчета называется **инерциальной**.

 **Инерция** - явление, при котором тело продолжает находиться в состоянии покоя или равномерного движения, если это состояние не изменяется под действием внешней силы.

1. Ускорение, приобретаемое телом, прямо пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно массе тела.

$$\overbar{F}=m⋅\overbar{a} ⇔ \overbar{a}=\overbar{F}/m$$

Второй закон Ньютона является основным законом в динамике и выполняется только в инерциальной системе отсчета.

1. Силы, с которыми тела действуют друг на друга, лежат на одной прямой, имеют противоположные направления и равные модули.

$$\overbar{F}\_{2\rightarrow 1}= -\overbar{F}\_{1\rightarrow 2}$$

Основной задачей динамики любого механического движения является нахождения ускорения тела с помощью второго закона Ньютона.

## Параграф 2. Основное уравнение динамики вращательного движения

Для нахождения углового ускорения в динамике вращательного движения существует аналог формулы второго закона Ньютона. Чтобы понять происхождение и суть этого аналога, необходимо вспомнить, что такое **тангенциальное** и **нормальное** (центростремительное) ускорение (*рис 2.1*).

**Тангенциальное ускорение (**$a\_{τ}$**)** - компонента ускорения, направленная по касательной к окружности или кривой, по которой происходит движение.

**at**

**an**

**a**

*O*

*рис 2.1*

**Нормальное ускорение (**$a\_{n}$**)** - компонента ускорения, перпендикулярная тангенциальному ускорению и направленная к центру окружности (если же движение идет по кривой, то на каждом участке этой кривой можно нарисовать окружность; таким образом, нормальное ускорение будет направлено в центр этой окружности).

 При движении по окружности или кривой скорость точки всегда направлена по касательной к траектории. Таким образом, мы можем выразить тангенциальное ускорение через изменение линейной скорости:

$$a\_{t}=\frac{Δv}{t}=\frac{v-v\_{0}}{t}$$

 Мы знаем, что при движении по окружности величину линейной скорости тела можно выразить через угловую скорость: $v=ω∙r$, где $ω$ – угловая скорость; $r$ – радиус окружности, по которой происходит движение. Подставим эту формулу в уравнение для тангенциального ускорения:

$$a\_{t}=\frac{v\_{τ}-v\_{τ0}}{t}=\frac{ω∙r-ω\_{0}∙r}{t}=r∙\frac{Δω}{t}$$

 Мы знаем, что $ω=ω\_{0}\pm ε⋅t$; отсюда следует, что $ε=\frac{ω-ω\_{0}}{t}=\frac{Δω}{t}$.

$$\left\{\begin{array}{c}a\_{t}=r∙\frac{Δω}{t}\\ε=\frac{Δω}{t}\end{array}=>a\_{t}=r∙ε \right.$$

 Таким образом, мы получили формулу, связывающую тангенциальное и угловое ускорение тела.

*O*

T

F

**Y**

**X**

$$α$$

*рис 2.2*

r

Теперь представим, что у нас есть небольшой шарик массой $m$, подвешенный на нерастяжимой нити длиной $r$, на который действует сила $\overbar{F}$ под углом $α$ к оси $oy$ (*рис 2.2*). Напишем второй закон Ньютона для этого шарика в проекциях на оси $ox$ и $oy$:

$$ox: F⋅sinα=m⋅a\_{x}$$

$$oy: T-F⋅cosα=m⋅a\_{y}$$

 Шарик будет двигаться по окружности против часовой стрелки, при этом ускорение $a\_{y}$ будет направлено в центр этой окружности, а ускорение $a\_{x}$ – перпендикулярно оси $oy$, то есть по касательной. Таким образом, $a\_{y}$ – это нормальное ускорение шарика, а $a\_{x}$ – тангенциальное.

 Теперь заменим тангенциальное ускорение в уравнении второго закона Ньютона по оси $ox$ на $r∙ε$ и выразим угловое ускорение:

$$F⋅sinα=m⋅ r∙ε=> ε=F⋅sinα/m∙r$$

Умножим числитель и знаменатель на радиус окружности $r$:

$$ε=F⋅r∙sinα/m∙r^{2}$$

Таким образом, мы получили основное уравнение динамики вращательного движения, которое по-другому можно записать как $ε=M/I$.

*Формулы динамики поступательного и вращательного движения*

|  |  |
| --- | --- |
| Поступательное движение | Вращательное движение |
| $$\overbar{F}=m⋅\overbar{a} ⇔ \overbar{a}=\overbar{F}/m$$ | $$M=I⋅\overbar{ε} ⇔ ε=M/I$$ |
| $$\overbar{F}$$ | $$m$$ | $$\overbar{a}$$ | $$M$$ | $$I$$ | $$ε$$ |
| сила | масса | линейноеускорение | момент силы | момент инерции | угловое ускорение |

 Аналогом силы в данном уравнении является **момент сил**, а аналогом массы - **момент инерции**. Но прежде чем приступить к детальному изучению каждой из этих физический величин, необходимо разобраться еще с одним понятием, напрямую связанным с динамикой и кинематикой вращательного движения - **центром масс**.

#

## Параграф 3. Центр масс

 Если тело никак не зафиксировано, то при его вращательном движении точкой, относительно которой происходит вращение, является **центр масс**.

Ниже представлены две таблицы: “*Формулы для расчета координат центра масс по осям”* и “*Формула для расчета радиус-вектора центра масс”* - в первой приведены формулы для расчета координаты центр масс отдельно по оси $X$ и по оси $Y$, во второй таблице - формула, по которой считается **радиус-вектор** центра масс.

**Радиус-вектор** - вектор, идущий из некоторой заранее фиксированной точки, называемой началом координат, к нужной нам точке.

*Формулы для расчета координат центра масс по осям*

|  |  |
| --- | --- |
| По оси $X$ | По оси $Y$ |
| $$x\_{c}=\sum\_{i=1}^{n}m\_{i}⋅x\_{i}/\sum\_{i=1}^{n}m\_{i}$$ | $$y\_{c}=\sum\_{i=1}^{n}m\_{i}⋅y\_{i}/\sum\_{i=1}^{n}m\_{i}$$ |
| $$x\_{c}$$ | $$m\_{i}$$ | $$x\_{i}$$ | $$y\_{c}$$ | $$m\_{i}$$ | $$y\_{i}$$ |
| Координата центра масс | Масса i-й точки | Координата i-й точки | Координата центра масс | Масса i-й точки | Координата i-й точки  |

|  |
| --- |
| По оси $X$ + По оси $Y$ |
| $$\overbar{r}\_{c}=\sum\_{i=1}^{n}m\_{i}⋅\overbar{r}\_{i}/\sum\_{i=1}^{n}m\_{i}$$ |
| $$\overbar{r}\_{c}$$ | $$m\_{i}$$ | $$\overbar{r}\_{i}$$ |
| **радиус вектор** центра масс | Масса i-й точки | **радиус вектор** i-й точки |

*Формула для расчета радиус-вектора центра масс*

## Параграф 4. Момент силы

 Подобно тому, как сила заставляет объект ускоряться в линейной кинематике, момент силы придает объекту угловое ускорение. Момент силы является вектором, перпендикулярным как силе, так и ее плечу; однако мы считаем его скалярной величиной. Считается он по следующей формуле:

*Формула для подсчета момента силы*

|  |
| --- |
| $M\left(\overbar{F}\right)$=$\overbar{F}⋅\overbar{L}$ |
| $$M\left(\overbar{F}\right)$$ | $$\overbar{F}$$ | $$\overbar{L}$$ |
| момент силы $\overbar{F}$ | сила | **плечо силы** $\overbar{F}$ |

 **Плечо силы** – это вектор, идущий из точки, относительно которой происходит вращение, до максимально близкой точки на линии действия силы (*рис 2.1*). Длина этого вектора равна кратчайшему расстоянию между точкой вращения и линией действия силы.

*рис 2.3*

**F2**

**(сила)**

**L2**

**(плечо F2)**

**F1**

**(сила)**

**L**

**(плечо F1)**

Если на тело действуют несколько сил, то итоговый момент будет равен сумме моментов каждой силы.

##  Параграф 5. Момент инерции

Момент инерции - это скалярная величина, которая показывает, насколько сложно изменить угловую скорость объекта вокруг оси вращения. Момент инерции считается по следующей формуле:

*Формула для подсчета момента инерции*

|  |
| --- |
| $$I=\sum\_{i=1}^{n}m\_{i}⋅\overbar{r}\_{i}^{2}$$ |
| $$I\_{i}$$ | $$m\_{i}$$ | $$\overbar{r}\_{i}$$ |
| момент инерции $i$-й точки | Масса i-й точки | расстояние от i-й точки до оси вращения |

**m1**

**m2**

**m3**

**ЦЕНТР**

**МАСС**

**r1**

**r2**

**r3**

*рис 2.4*