Глава I. Основы теории вероятности.

§1. Основные формулы для расчёта вероятности.

Теория вероятностей - математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений. Всем происходящим явлениям присущи элементы случайности. Для изучения данных явлений необходимо выделять основные факторы, которые будут определять эти явления, но для исследования явлений, связанных с неопределённостью, необходимо так же выделять факторы, искажающие результаты и имеющие специфические закономерности. Для таких исследований необходимы особые методы, с которыми работает теория вероятностей.

Для определения вероятности на практике необходимо уметь определять события по степени возможности их наступления. Для этого вводится термин вероятность определения, который определяет численно степень объективной возможности данного события.

Существует несколько формул для определения вероятности. Рассмотрим классическое, статистическое и геометрическое. В классическом определении - вероятность события равна отношению числа благоприятствующих событий к числу всех событий. P(A)=n/N, где n - число благоприятствующих событий, а N - общее число событий. Но при статистическом определении рассчитывается относительная частота события в ряду опытов. P(A)=m/N, где m - число опытов, в которых произошло событие А, N - общее число опытов. Геометрическое определение даёт возможность определить вероятность попадания точки в некоторую область. В этом случае P(A)=s/S, где s - площадь данной области, а S - площадь плоскости. Т.е. геометрическая вероятность определяет отношение меры области, которая благоприятствует событию A, к мере всей площади. При этом статистическая и геометрическая вероятность являются уже экспериментальными величинами.

С вероятностями можно производить различные математические действия, к примеру, сложение и умножение. Именно такими и являются две основные теоремы теории вероятности. А одним из следствий является формула Байеса (также вытекает из определения условной вероятности). Она позволяет по мере поступления новых данных проверять (корректировать) выдвинутые до испытания гипотезы предполагаемые данные. Основывается это на переходе от априорной вероятности (насколько вероятно событие в общем) к апостериорной (насколько вероятно оказалось событие после проведения эксперимента). Формула Байеса имеет вид:

46b680c10ac90b0782843f4bbd0b4a95.png

где P(A)  - априорная вероятность гипотезы A, P (A|B)  - апостериорная вероятность; P(B|A) - вероятность наступления события B при истинности гипотезы A, P(B) — полная вероятность наступления события B.

Итак, в данном параграфе мы рассмотрели те основные формулы для расчёта вероятности, которыми будем пользоваться при проведения эксперимента.

§2. Парадоксы теории вероятностей.

В математике, как и в любой другой науке есть место противоречиям. Поэтому математика полна парадоксов, в особенности теория вероятностей. Первые парадоксы возникли из популярных азартных игр, но сейчас их уже намного больше и лишь меньшая их часть относится к азартным играм. Рассмотрим некоторые из них.

Парадокс Байеса появляется из формулы Байеса, которую мы рассмотрели в предыдущем параграфе. При вероятностном распределении случайной величины, зависящей от определённого параметра, проводятся наблюдения. Ожидаемо, что последовательность апостериорных распределений всё более концентрируется около истинного значения. Парадоксальность ситуации состоит в том, что наибольшие значения апостериорной функции ожидаются около истинного значения. Но это не противоречит условию, что функции апостериорных плотностей будут сосредотачиваться вокруг другого значения.

Парадокс независимости. Объясним на примере, пусть, при броске двух правильных монет, A - на одной монете выпал орёл, B - на второй монете выпал орёл, C - только на одной монете выпал орёл. При этом события A и B не зависимы друг от друга, но любое из них определяет третье. Видим, что A и B - не зависимы, но с другой стороны события A и C, которые кажутся зависимыми на первый взгляд таковыми не являются. Это видно из формул: P(AC)=P(A)\*P(C), а P(BC)=P(B)\*P(C). Получается, что любые два события определяют третье, так как каждое происходит только тогда, когда происходит ровно одно из двух других. Этот парадоксальный феномен заключается в том, что попарная независимость событий не определяет их независимость в совокупности.

Парадокс точности измерения, его необходимо учитывать при осуществлении измерений. Допустим, что необходимо найти длину двух тел. Прибор, которым мы измеряем данные тела, выдаёт результат со случайной ошибкой, которая имеет стандартной отклонение σ. Парадоксальность заключается в том, что отклонение результата будет меньше, если сначала измерить общую длину тел (приложив конец одного к концу второго), а затем найти разницу длин двух тел. Тогда, приняв общую длину двух тел за D, а разницу длин за X, получим, что приближённые длины двух тел равны (D-X)/2 и (D+X)/2. Тогда стандартное отклонение длин данных тел будет равно σ/√2, что действительно меньше, чем σ.