Департамент образования города Москвы

Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение города Москвы

Школа №1505

«Московская городская педагогическая гимназия-лаборатория - Преображенская»

**РЕФЕРАТ**

на тему:

**Диофантовые уравнения**

Выполнил:

Гусев Никита 9 «Б»

Руководитель:

Шалимова Марина Николаевна

Москва

 2017/2018 уч.г.

Содержание

1. Введение
2. Диофантовые уравнения первой степени
3. Диофантовы уравнения степени выше первой.
4. Приложение. Примеры заданий.
5. Историческая справка
6. Заключение
7. Список литературы

Введение

**Линейное Диофантово уравнение с двумя неизвестными – это уравнение в целых числах вида:**

***ax + by = c***

**относительно переменных *x* и *y*, придуманные великим древнегреческим математиком Диофантом. Предполагается, что a и b отличны от нуля.**

 Решение Диофантового уравнения сводится к следующему алгоритму:
• Ответ на вопрос: «Имеет ли уравнение смысл?»;
• Рассмотрение вырожденного случая;
• Нахождение частного решения;
• Получение всех решений.

**История вопроса:**

Диофа́нт Александри́йский- древнегреческий математик, живший предположительно в III веке н. э. Нередко упоминается как «Отец алгебры». Диофант- автор учебника по математике «Арифметика» в 13 книгах (6 сохранились). Он представляет собой предваренный вступлением сборник задач, где решаются вопросы из области Теории чисел, изучаются решения диофантовых уравнений. Диофант, ориентируясь на древнеегипетскую или вавилонскую систему счета, отделяет чистую арифметику от геометрии и закладывает основы алгебры.

Комментировать Диофанта начали ещё в древности. Разбору его книг были посвящены труды знаменитой Гипатии, дочери Теона Александрийского. Свое новое «рождение» идеи Диофанта получили в Константинополе, а также на арабском Востоке, откуда проникли в Европу. В 1572 году в «Алгебре» Рафаэля Бомбелли, профессора университета в Болонье, вдруг появляются 143 задачи из «Арифметики» Диофанта. Методы Диофанта обрели новую жизнь только в произведениях двух крупнейших математиков Франции XVI–XVII веков — Франсуа Виета и Пьера Ферма.

 Первый этап развития учения о неопределённых уравнениях второго и третьего порядков, начало которому положил Диофант, нашёл своё завершение в работах Леонарда Эйлера.

 При решении линейных Диофантовых уравнений используется свойства делимости натуральных чисел, которые в полном объеме в рамках школьной программы не изучаются.

 Некоторые вопросы делимости изучаются в шестом классе. В прошлом году я создал проект по теме "Создание программы для решения Диофантовых уравнений первой степени". В этом году я решил продолжить работу в этом направлении, а именно по теме, связанной с решением Диофантовых уравнений высших степеней.

**Проблема реферата:**

Разобраться, как решаются Диофантовые уравнения высших степеней. Определить, существуют ли определенные алгоритмы решения уравнений. И если они существуют, научиться их применять.

**Цель реферата:**

Понять, насколько данная тема актуальна при изучении других вопросов школьного курса математики старшей школы, используется ли она в других областях знаний в школе.

**Задачи реферата:**

 Подобрать литературу по данной теме. Систематизировать собранную информацию, выявить основные методы решения Диофантовых уравнений высших порядков, на основании которых выделить наиболее универсальные для применения в решении задач школьной программы и, в частности, для номеров ЕГЭ повышенной сложности.

**Часть 1.** Диофантовые уравнения первой степени

«Какие уравнения называются диофантовыми?»
Линейное диофантово уравнение с двумя неизвестными – это уравнение в целых числах вида:
ax + by = c (1)
относительно переменных x и y.
Предполагается, что a и b отличны от нуля.
Решение диофантового уравнения сводится к следующему алгоритму:
• Ответ на вопрос: «Имеет ли уравнение смысл?»;
• Рассмотрение вырожденного случая;
• Нахождение частного решения;
• Получение всех решений
Решением линейного диофантового уравнения называют все решения уравнения (1). Как правило решения таких уравнений записываются в следующей форме:
x=x0+k\*n,
y=y0+l\*n,
где nℤ
Причем числа k, l, x0, y0 являются целыми и фиксированными в зависимости от данного уравнения. Любую конкретную пару из этого множества решений называют частным решением данного диофанового уравнения.
Задачи направленные на применение методов решения диофантовых уравнений обычно появляются в школьной программе с 8 класса. Примеры на эту тему часто включают в варианты ОГЭ и ЕГЭ.

**«Перейдем к конкретным примерам…»**
1. Рассмотрим уравнение
4x+4y=9
Первое, что мы должны сделать, приступая к решению диофантового уравнения это убедиться в том, что корни вообще существуют.
Диофантово уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда с делится на d, где Н.О.Д.(a,b) = d в уравнении (1).
В нашем случае Н.О.Д.(a,b) = Н.О.Д.(4,4) =4.
С=9 и очевидно что 9 не делится на 4, а значит данное уравнение не имеет решений.
Ответ: нет решений.

2. Рассмотрим уравнение
2x+3y=0
Линейные диофантовы уравнения, в которых c=0 получили отдельное название: однородное линейное диофантово уравнение.
Нетрудно получить, что
x= - y= - y =-1,5y
Так как x должен быть целым числом, то y = 2n , где n - произвольное целое число. Значит x = - 3n и решениями однородного диофантова уравнения являются все пары вида
{- 3n , 2n }, где nℤ

Ответ: {- 3n , 2n }, где nℤ

3. Рассмотрим уравнение
2x+3y=5
Убедимся что решения существуют.
Затем применим разделим с остатком:

3=2\*1+1
5=2\*2+1

Согласно блок-схеме получаем частное решение y0=1:1=1.
Подставляя это решение в исходное уравнение находим частное решение x0=(5-3):2=1.

Вычтем из исходного уравнения равенство полученное подставлением найденных частных решений в исходное уравнение:

2(x-1)+3(y-1)=5-5
2(x-1)+3(y-1)=0

Решение полученного уравнения найдем аналогично Примеру 2:

x-1=-3n, y-1=2n, где nℤ

Ответ: x=1-3n, y=1+2n, где nℤ

**Диофантовы уравнения степени выше первой.**

**Решение диофантовых уравнений методом разложения на множители.**

**Задача 1.** Решить в целых числах уравнение

*x + y = xy*.

**Решение.** Запишем уравнение в виде

(*x* - 1)(*y* - 1) = 1.

Произведение двух целых чисел может равняться 1 только в том случае, когда оба они равны 1. Т. е. исходное уравнение равносильно совокупности

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| http://works.doklad.ru/images/na298o15cHQ/m7f4ff55e.png | http://works.doklad.ru/images/na298o15cHQ/m2c5fcfa4.png | *x* - 1 = 1, |
| *y* - 1 = 1, |
| http://works.doklad.ru/images/na298o15cHQ/m2c5fcfa4.png | *x* - 1 = -1, |
| *y* - 1 = -1, |

с решениями (0,0) и (2,2).

**Использование четности**

**Задача 2.** Решить в простых числах уравнение

|  |
| --- |
| *x*2 - 2*y*2 = 1. |

**Решение.** Рассмотрим два случая в зависимости от четности переменной *x*.

a) Пусть *x* - нечетное число. Подстановка *x* = 2*t* + 1 приводит исходное уравне­ние к виду

(2*t* + 1)2 - 2*y*2 = 1,

или

2*y*2 = 4*t*(*t* + 1).

Следовательно, *y*2 кратно 2. Так как *y* - простое число, то *y* = 2. Отсюда *х=* =3.

b) Пусть *x* - четное число. Так как *x* - простое число, то *x* = 2. Следовательно,  т. е. уравнение неразрешимо в простых числах.

Следовательно, уравнение имеет в классе простых чисел единственное реше­ние (3;2).

**Задача 3.** Доказать, что уравнение

|  |  |
| --- | --- |
| *x*2 - 2*y*2 = 1 |  |

имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

**Решение.** Нетрудно заметить, что (3,2) - одно из решений исходного уравне­ния. С другой стороны из тождества

(*x*2 + 2*y*2)2 - 2(2*xy*)2 = (*x*2 - 2*y*2)2

следует, что если (*x*, *y*) - решение данного уравнения, то пара (*x*2 + 2*y*2 , 2*xy*) также явля­ется его решением. Используя этот факт, рекуррентно определим бесконеч­ную последовательность (*xn , yn*) различных решений исходного уравнения:

*(x1 , y1) = (3,2)   и   xn+1 = xn2 + 2yn2,     yn+1 = 2xnyn,     n ∈****N****\*.*

**Задача 4.** Доказать, что уравнение

*x*(x + 1) = 4y(y+ 1)

неразрешимо в целых положительных числах.

**Решение.** Нетрудно заметить, что исходное уравнение равносильно уравнению

*x2* + *x* + 1 = (2*y* + 1)2.

Следовательно, *x*2 < (2*y* + 1)2 < (*x* + 1)2 или *x* < 2*y* + 1 < *x* + 1. Полученное противо­речие доказывает требуемое утверждение.

**Задача 5.** Решить в целых числах уравнение

*x + y = x2 - xy + y2.*

**Решение.** Положим t = x + y. Так как

*x2* – xy + y2  ≥ 0,25(*x +* y)2

то должно выполняться неравенство *t ≥*  0,25 *t2 , откуда t* ∈ [0;4].

**Приложение.**

**Упражнения для тренировки.**

1) Решите в целых числах.

|  |  |
| --- | --- |
| а) 8x + 12y = 32 | x = 1 + 3n, y = 2 - 2n, n http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| б) 7x + 5y = 29 | x = 2 + 5n, y = 3 – 7n, n http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| в) 4x + 7y = 75 | x = 3 + 7n, y = 9 – 4n, n http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| г) 9x – 2y = 1 | x = 1 – 2m, y = 4 + 9m, m http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| д) 9x – 11y = 36 | x = 4 + 11n, y = 9n, n http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| е) 7x – 4y = 29 | x = 3 + 4n, y = -2 + 7n, n http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| ж) 19x – 5y = 119 | x = 1 + 5p, y = -20 + 19p, p http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| з) 28x – 40y = 60 | x = 45 + 10t, y = 30 + 7t, t http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |

2) Найти целые неотрицательные решения уравнения:

|  |  |
| --- | --- |
| а) 8x + 65y = 81 | x = 2, y = 1 |
| б) 17x + 23y = 183 | x = 4, y = 5 |

3) Найти все пары целых чисел (x; y), удовлетворяющие следующим условиям

|  |  |
| --- | --- |
| а) x + y = xy | (0;0), (2;2) |
| б) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image952.gif | (1;2), (5;2), (-1;-1), (-5;-2) |

*Решение:*



*Число 3 можно разложить на множители:*

3 = 1•3 = 3·1 = (-1)·(-3) = (-3)·(-1)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| a) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image954.gif | б) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image955.gif | в) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image956.gif | г) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image957.gif |

Ответ: (-1; -2), (5; 2), (1;2), (-5; -2).

|  |  |
| --- | --- |
| в) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image958.gif | (11;12), (-11;-12), (-11;12), (11;-12) |
| г) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image959.gif | (24;23), (24;-23), (-24;-23), (-24;23) |
| д) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image960.gif | (48;0), (24;1), (24;-1) |
| е) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image961.gif | x = 3m; y = 2m, mhttp://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| ж) *y = 2x – 1* | x = m: y = 2m – 1, m http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| з) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image962.gif | x = 2m; y = m; x = 2m; y = -m, m http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image926.gifZ |
| и)http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image963.gif | решений нет |

4) Решить уравнения в целых числах

|  |  |
| --- | --- |
| http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image964.gif | (-3;-2), (-1;1), (0;4), (2;-2), (3;1), (5;4) |
| (x - 3)(xy + 5) = 5 | (-2;3), (2;-5), (4;0) |
| (y + 1)(xy – 1)=3 | (0;-4), (1;-2), (1;2) |
| http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image965.gif | (-4;-1), (-2;1), (2;-1), (4;1) |
| http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image966.gif | (-11;-12), (-11;12), (11;-12), (11;12) |
| http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image967.gif | (-24;23), (-24;23), (24;-23), (24;23) |

5) Решить уравнения в целых числах.

|  |  |
| --- | --- |
| а) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image968.gif | (-1;0) |
| б)http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image969.gif | (5;0) |
| в) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image970.gif | (2;-1) |
| г) http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/417558/image971.gif | (2; -1) |

**Историческая справка**

 Одним из продолжателей работ Диофанта можно считать Пьера Ферма. Около 1630 года перевод «Арифметики» попал в руки этому выдающемуся французскому математику. Ферма, вдохновленный бессмертным трудом Диофанта, разработал очень тонкие и глубинные теоретико-числовые исследования. В частности, идя по стопам Диофанта, Ферма доказал, что натуральное число *a*, тогда и только тогда, представимо в виде суммы двух квадратов (*x*2 + *y*2) с целыми *x* и *y* , когда все простые делители *a* , дающие при делении на 4 остаток 3 , входят в число *а* в четной степени. Он также нашел формулу для количества различных пар ( *x* ; *y* ) таких чисел. Работа Диофанта, дала повод Пьеру Ферма записать на полях перевода одно из самых достопримечательных замечаний в истории математики, которое мы называем Великой теоремой Ферма. Именно на полях этой книги, против того места, где идёт речь о решении уравнения вида *х*2 + *у*2 = *z*2, Ферма написал: «Между тем, совершенно невозможно разложить полный куб на сумму кубов, четвёртую степень – на сумму четвёртых степеней, вообще какую-нибудь степень – на сумму степеней с тем же показателем. Я нашёл поистине удивительное доказательство этого предположения, но здесь слишком мало места, чтобы его поместить». Это утверждение Ферма теперь формулируется как теорема в следующем виде: «Уравнение *xn* +y*n* = *zn* не может быть решено в натуральных числах относительно *x , y* и *z* при натуральных значениях показателя *n* , больших 2». Общеизвестно, что при *n* =2 такие числа существуют, например, 3, 4, 5 – числа, которые, если являются длинами сторон, образуют знаменитый треугольник Пифагора. Хотя формулировка носит очень простой характер, ее доказательство ученые искали несколько веков.

**Заключение**

 Работы по истории развития математики показывают, что именно благодаря методам Диофанта были разгаданы методы самого Архимеда. Развитие интеграционных методов Архимеда привело к созданию интегрального и дифференциального исчисления

Ньютоном и Лейбницем, то история методов Диофанта растягивается еще на несколько сотен лет. Попытки решить довольно простые в формулировках задачи, приводили к созданию и развитию теории алгебраических функций и алгебраической геометрии. Неразрешимость некоторых задач и идей Диофанта привело к великим работам Анри Пуанкаре и Андре Вейля. Раздел математики, занимающийся решением диофантовых уравнений, называется «диофантовым анализом», и он, в свою очередь, является частью интересного раздела современной математики – теории чисел. В самой теории чисел созданы специальные методы решения диофантовых (их ещё называют неопределёнными) уравнений. Задача решения уравнений третьей степени с двумя неизвестными до сих пор не нашла полного решения. Интерес к проблеме решения диофантовых уравнений остается и по сей день. На вопрос - имеет ли произвольное диофантово уравнение целочисленные решения, не найден и даже пока неизвестно, существует ли такой алгоритм.

 Именно Диофант открыл нам мир арифметики и алгебры. Поэтому история диофантова анализа показалась мне особенно интересной. Я хотел бы продолжить работу над этой темой, расширить свои познания в решении неопределённых уравнений.

**Список литературы:**

**1.Журнал «Квант». Номер 12, 1978 года. Номер 4, 1985 года.**

**2.Виленкин, Н.Я. За страницами учебника математики: Пособие для учащихся 5-6 классов средней школы / Н.Я. Виленкин, И.Я. Депман. – М.: Просвещение, 1989. – 287 с.**

**3.Гильфорд, А.О. Решение уравнений в целых числах / А.О. Гильфорд. – М.: Наука, 1983. – 64 с.**

**4.Башмакова, И.Г. Диофант и диофантовы уравнения / И.Г. Башмакова. – М.: Наука, 1972. – 68 с.**